

## PARA EMPEZAR

- 1 Copia y completa la siguiente tabla correspondiente a una función lineal. ¿Cuál es su fórmula?

x	-2	0	1	2	3	...	x
y	-7	1	5	9	13	...	$y = 4x + 1$

La fórmula es  $y = 4x + 1$

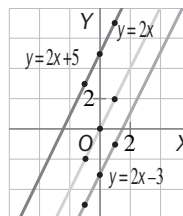
- 2 Representa en los mismos ejes de coordenadas las siguientes rectas.

a)  $y = 2x$

b)  $y = 2x - 3$

c)  $y = 2x + 5$

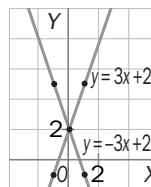
x	...	-1	0	1	...
$y = 2x$	...	-2	0	2	...
$y = 2x - 3$	...	-5	-3	-1	...
$y = 2x + 5$	...	3	5	7	...



Las rectas son paralelas.

- 3 Representa las rectas  $y = 3x + 2$ , e  $y = -3x + 2$ . ¿Qué diferencia observas entre ellas?

x	...	-1	0	1	...
$y = 3x + 2$	...	-1	2	5	...
$y = -3x + 2$	...	-5	2	-1	...



Las dos rectas tienen la misma ordenada en el origen, pero distinta pendiente. En la primera, cuya pendiente es positiva, al crecer  $x$  crece la  $y$  (es creciente), en la segunda, al crecer  $x$  decrece la  $y$  (es decreciente).

- 4 En el triángulo rectángulo de la figura calcula:

a) La longitud del cateto desconocido.

b) La tangente del ángulo  $\hat{B}$ .

a) Por Pitágoras:  $5^2 = 3^2 + c^2 \rightarrow 25 = 9 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$  m

a)  $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{4}{3} = 1,33$

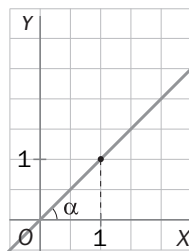


- 5 Representa las siguientes rectas y halla la tangente del ángulo que forman con el eje de abscisas.

a) La bisectriz del primer cuadrante.

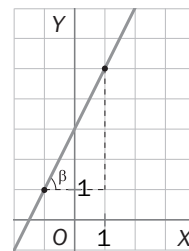
b) La recta de ecuación  $y = 2x + 3$

a) La bisectriz del primer cuadrante pasa por el punto  $(1, 1) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1} = 1$



b) La recta  $y = 2x + 3$  pasa por los puntos

$(1, 5)$  y  $(-1, 1) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{5 - 1}{1 - (-1)} = 2$



- 6 En unos determinados ejes de coordenadas, la recta representada por el rayo láser de la ilustración pasa por los puntos  $A(1, 1)$  y  $B(4, 1)$ . Halla la ecuación de esa recta.

Si la ecuación de la recta es  $y = mx + n$ , las coordenadas de  $A$  y  $B$  deben de satisfacer su ecuación.

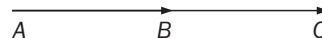
$$\begin{cases} 1 = m + n \\ 1 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow 3m = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \text{La ecuación de la recta es } y = 1.$$

## Vectores en el plano

### PARA PRACTICAR

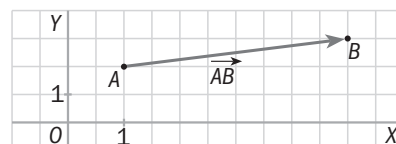
- 9.1 Dibuja dos vectores que tengan el mismo módulo, dirección y sentido, y tales que el origen de uno de ellos coincida con el extremo del otro.

Los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$  tienen el mismo módulo, dirección y sentido y el origen de  $\overrightarrow{BC}$  coincide con el extremo de  $\overrightarrow{AB}$ .

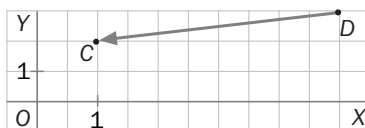


- 9.2 Dibuja en papel cuadriculado un vector que tenga:

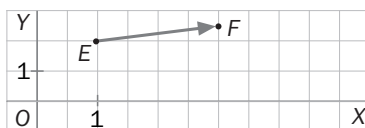
- El mismo módulo y la misma dirección, pero distinto sentido que  $\overrightarrow{AB}$ .
- Distinto módulo, pero la misma dirección y el mismo sentido que  $\overrightarrow{AB}$ .
- El mismo módulo, pero distinta dirección que  $\overrightarrow{AB}$ .



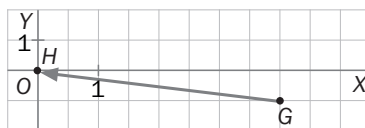
- a) El vector  $\overrightarrow{CD}$  tiene el mismo módulo y la misma dirección, pero distinto sentido que  $AB$ .



- b) El vector  $\overrightarrow{EF}$  tiene distinto módulo, pero la misma dirección y el mismo sentido que  $AB$ .



- c)  $\overrightarrow{GH}$  tiene el mismo módulo, pero distinta dirección y distinto sentido que  $AB$ .



- 9.3 Los puntos  $B$  y  $C$  dividen el segmento  $AD$  en tres partes iguales.

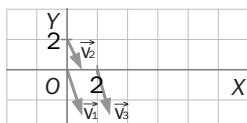


Indica cuáles de los siguientes vectores son equipolentes:

$\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  y  $\overrightarrow{DA}$ .

$\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  son equipolentes,  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{BD}$  son equipolentes,  $\overrightarrow{CB}$  y  $\overrightarrow{DA}$  no son equipolentes a ninguno de los demás vectores.

- 9.4 Dibuja en papel cuadriculado 3 representantes del vector libre  $\vec{v} = (1, -3)$ .



Los vectores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  y  $\vec{v}_3$  son tres representantes del vector libre  $\vec{v}$ .

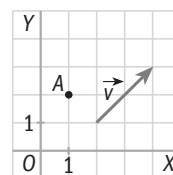
## Ejercicio resuelto

**9.5** Halla las coordenadas de  $B$  sabiendo que el vector  $\overrightarrow{AB}$  es un representante del vector  $\vec{v}$ .

Las coordenadas del vector  $\vec{v}$  son:  $\vec{v} = (2, 2)$ .

Las coordenadas de  $A$  son  $(1, 2)$ , por lo que si  $B(x, y)$ , las coordenadas del vector  $\overrightarrow{AB}$  son:  $\overrightarrow{AB} = (x - 1, y - 2)$ .

Las coordenadas de  $\vec{v}$  y  $\overrightarrow{AB}$  deben ser iguales.  $\left. \begin{array}{l} x - 1 = 2 \\ y - 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3, y = 4 \Rightarrow B(3, 4)$



**9.6** Halla el origen o el extremo que falta en los representantes del vector libre  $\vec{v} = (0, -2)$  que tienen:

a) Origen en el punto  $A(-3, 1)$

b) Extremo en el punto  $B(-1, 0)$

a) Si  $A'(x, y)$  es el extremo del vector  $\overrightarrow{AA'}$ , representante de  $\vec{v}$ , se tiene:

$$\overrightarrow{AA'} = (x + 3, y - 1) = (0, -2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ y - 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -3, y = -1$$

Las coordenadas del extremo del vector  $\overrightarrow{AA'}$ , son:  $A'(-3, -1)$ .

b) Si  $B'(x, y)$  es el origen del vector  $\overrightarrow{B'B}$ , representante de  $\vec{v}$ , se tiene:

$$\overrightarrow{B'B} = (-1 - x, -y) = (0, -2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -1 - x = 0 \\ -y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1, y = 2$$

Las coordenadas del origen del vector  $\overrightarrow{B'B}$  son:  $B'(-1, 2)$ .

## PARA APLICAR

### Problema resuelto

**9.7** De un paralelogramo  $ABCD$  se conocen las coordenadas del vector  $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$  y de los puntos  $A(1, 3)$  y  $D(2, 1)$ . Halla las coordenadas de los vértices  $B$  y  $C$ .

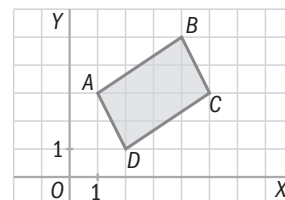
$$\text{Si } B(x, y) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x - 1, y - 3), \text{ luego: } \left. \begin{array}{l} x - 1 = 3 \\ y - 3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow B(4, 5)$$

$$\text{Si } C(x', y') \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x' - 2, y' - 1)$$

Como  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{DC}$  son equipolentes, sus coordenadas son iguales.

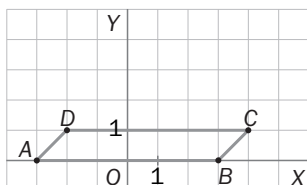
$$\left. \begin{array}{l} x' - 2 = 3 \\ y' - 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x' = 5 \\ y' = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow C(5, 3)$$

Los vértices pedidos son  $B(4, 5)$  y  $C(5, 3)$ .



**9.8** Tres vértices de un paralelogramo tienen las coordenadas  $(-3, 0)$ ,  $(3, 0)$  y  $(4, 1)$ . Halla las coordenadas del cuarto vértice sabiendo que está situado en el segundo cuadrante.

Si  $A(-3, 0)$ ,  $B(3, 0)$  y  $C(4, 1)$ , y el cuarto vértice  $D(x, y)$  está situado en el cuarto cuadrante, es que  $D$  es el vértice opuesto al  $B$ .



$\overrightarrow{CD} = (x - 4, y - 1)$  es equipolente a  $\overrightarrow{BA} = (-3 - 3, 0 - 0) = (-6, 0)$ , luego:

$$\left. \begin{array}{l} x - 4 = -6 \\ y - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El cuarto vértice es } D(-2, 1).$$

**9.9** Dados los puntos  $A(1, m)$ ,  $B(m, 2)$ ,  $C(0, 3)$  y  $D(-1, 5)$ , halla el valor de  $m$  tal que los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  sean equipolentes.

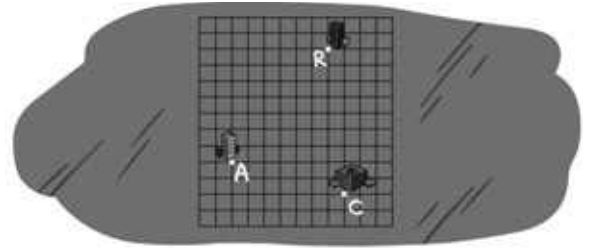
$$\overrightarrow{AB} = (m - 1, 2 - m), \overrightarrow{CD} = (-1, 2)$$

Para que  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{CD}$  sean equipolentes, deben tener las mismas coordenadas.

$$m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0$$

$$2 - m = 2 \Rightarrow m = 0 \quad m \text{ debe valer } 0.$$

- 9.10 La figura muestra las posiciones de las casas de Angélica (A) y Roberto (R), y del colegio (C) en el que estudian ambos. Escribe las coordenadas del colegio:



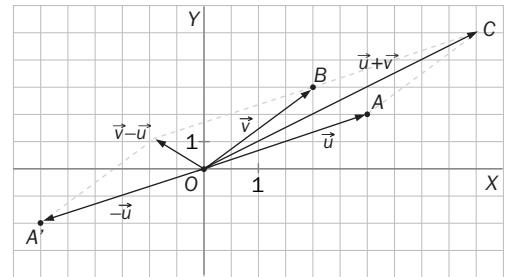
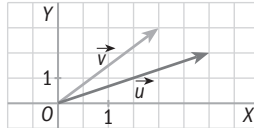
- a) Eligiendo como origen la casa de Angélica.  
b) Eligiendo como origen la casa de Roberto.
- a) Con origen en A el colegio está en el punto C (7, -2).  
b) Con origen en R el colegio está en el punto C (1, -9).

## Operaciones con vectores

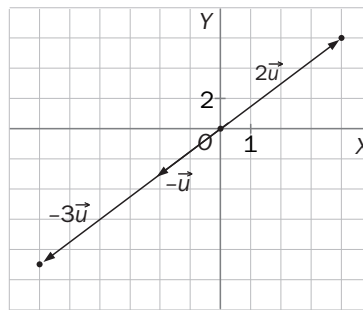
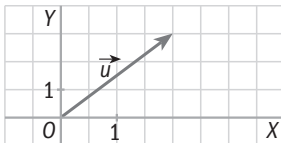
### PARA PRACTICAR

- 9.11 Dibuja los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{v} - \vec{u}$ .

Tomamos representantes  $\vec{OA}$  de  $\vec{u}$ ,  $\vec{OB}$  de  $\vec{v}$  y  $\vec{OA'}$  de  $-\vec{u}$ ; y después sumamos. El vector  $\vec{OC}$  es un representante de  $\vec{u} + \vec{v}$  y el vector  $\vec{OC'}$  es un representante de  $\vec{v} - \vec{u}$ .



- 9.12 Dibuja los vectores  $2\vec{u}$ ,  $-\vec{u}$  y  $-3\vec{u}$ .



- 9.13 Si  $\vec{AB} = (5, -2)$  y  $\vec{BC} = (-3, 1)$ , halla las coordenadas de los siguientes vectores.

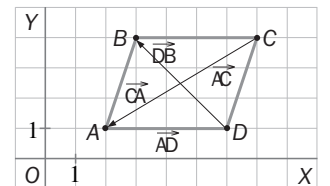
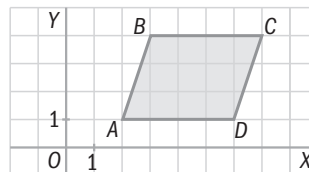
- a)  $\vec{AB} + \vec{BC}$       b)  $\vec{CA}$       c)  $3\vec{BC}$

- a)  $\vec{AB} + \vec{BC} = (5, -2) + (-3, 1) = (2, -1)$   
b) Como  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = (2, -1)$ , y  $\vec{CA} = -\vec{AC} \Rightarrow \vec{CA} = (-2, 1)$   
c)  $3\vec{BC} = 3 \cdot (-3, 1) = (-9, 3)$

- 9.14 Copia el paralelogramo ABCD y dibuja los siguientes vectores.

- a)  $\vec{AB} + \vec{BC}$       c)  $\vec{DC} + \vec{DA}$   
b)  $\vec{AB} + \vec{BD}$       d)  $\vec{CB} + \vec{CD}$

- a)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$       c)  $\vec{DC} + \vec{DA} = \vec{DB}$   
b)  $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$       d)  $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$



- 9.15 Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (2, 5)$ , halla los valores que deben tomar los números  $m$  y  $n$  para que el vector  $m\vec{u} + n\vec{v}$  tenga coordenadas (13, 32).

$$m\vec{u} + n\vec{v} = m(1, 2) + n(2, 5) = (m + 2n, 2m + 5n)$$

$$\left. \begin{array}{l} m + 2n = 13 \\ 2m + 5n = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 13 - 2n \\ 2(13 - 2n) + 5n = 32 \end{array}$$

$$26 - 4n + 5n = 32 \Rightarrow n = 6$$

$$m = 13 - 2 \cdot 6 \Rightarrow m = 1$$

9.16 Halla las coordenadas que faltan en la siguiente operación con vectores.

$$(5, -m) + 3(-2, 0) = (n, 4)$$

$$(5, -m) + 3(-2, 0) = (5 - 6, -m) = (-1, -m) \Rightarrow (-1, -m) = (n, 4) \Rightarrow \begin{cases} -1 = n \Rightarrow n = -1 \\ -m = 4 \Rightarrow m = -4 \end{cases}$$

### Ejercicio resuelto

9.17 Descompón el vector  $\vec{u} = (5, -6)$  en dos sumandos, uno con la dirección de  $\vec{v} = (2, -1)$  y otro con la de  $\vec{w} = (-1, 4)$ .

Los vectores proporcionales tienen la misma dirección; por tanto, los sumandos que buscamos son vectores proporcionales a  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ :  $a\vec{v}$  y  $b\vec{w}$ :  $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ .

Expresamos esta relación en coordenadas y operamos:

$$(5, -6) = a(2, -1) + b(-1, 4) = (2a - b, -a + 4b) \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 5 \\ -a + 4b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1$$

Por tanto, la descomposición es:  $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$ .

9.18 Dados los puntos  $A(3, 1)$ ,  $B(-1, m)$  y  $C(2, m)$ , halla el valor de  $m$  para que los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  tengan la misma dirección.

Para que  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  tengan la misma dirección, deben ser proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, m - 1) = (-4, m - 1), \overrightarrow{AC} = (2 - 3, m - 1) = (-1, m - 1).$$

Por tanto:  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ ; esto es:  $(-4, m - 1) = k(-1, m - 1)$

$$\begin{cases} -4 = -k \\ m - 1 = k(m - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ m - 1 = 4m - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 4 \\ 3 = 3m \end{cases} \Rightarrow k = 4, m = 1 \Rightarrow m \text{ debe valer } 1.$$

9.19 Halla los valores de  $a$  y  $b$  tales que se cumpla la siguiente relación entre coordenadas de vectores.  $(3, 2) = a(1, 5) + b(1, -3)$

$$a(1, 5) + b(1, -3) = (a + b, 5a - 3b) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 5a - 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - b \\ 5(3 - b) - 3b = 2 \end{cases}$$

$$15 - 5b - 3b = 2 \Rightarrow 13 = 8b \Rightarrow b = \frac{13}{8} \Rightarrow a = 3 - \frac{13}{8} \Rightarrow a = \frac{11}{8}$$

9.20 Si  $\vec{u} = (-1, 5)$  y  $\vec{v} = (0, 3)$ , halla las coordenadas del vector  $\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$ .

$$\vec{w} = 3(-1, 5) - (0, 3) = (-3, 15) - (0, 3) = (-3, 12).$$

Las coordenadas del vector  $\vec{w}$  son  $(-3, 12)$ .

### PARA APLICAR

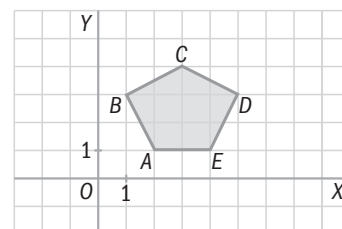
9.21 En el pentágono  $ABCDE$ , calcula esta suma de vectores:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ .

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

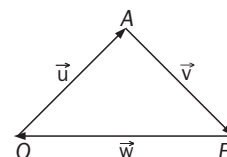
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

Por tanto:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .



9.22 ¿Cómo deben estar situados tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  para que  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ ?

Los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  deben estar situados de tal forma que, tomando un representante  $\overrightarrow{OA}$  de  $\vec{u}$ , y un representante  $\overrightarrow{AB}$  de  $\vec{v}$ , entonces el representante de  $\vec{w}$  sea  $\overrightarrow{BO}$ ; esto es, los puntos  $O$ ,  $A$  y  $B$  deben ser vértices de un triángulo. En efecto:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OO}$ , luego  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ .



- 9.23 Si  $A(1, -3)$  y  $B(-2, 0)$ , demuestra gráficamente y mediante coordenadas que cualquiera que sea el punto  $P(x, y)$ , se verifica la siguiente relación.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$$

Geoméricamente: si  $\overrightarrow{AB}$  es un vector cualquiera y  $P$  un punto cualquiera, dibujamos los vectores  $\overrightarrow{PA}$  y  $\overrightarrow{PB}$ . Se tiene entonces:  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB}$ , luego  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}$ .

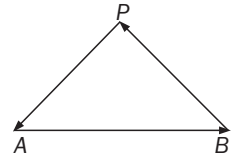
En coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 0 + 3) = (-3, 3)$$

$$\overrightarrow{PB} = (-2 - x, 0 - y) = (-2 - x, -y)$$

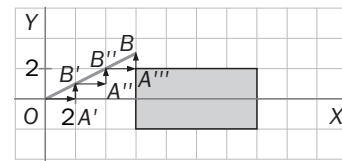
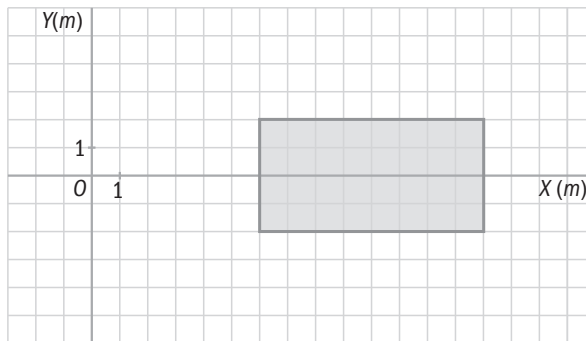
$$\overrightarrow{PA} = (1 - x, -3 - y)$$

$$\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = (-2 - x, -y) - (1 - x, -3 - y) = (-2 - x - 1 + x, -y + 3 + y) = (-3, 3) = \overrightarrow{AB}.$$



- 9.24 Un insecto intenta caminar desde  $O$  hasta la piscina, distante 6 metros, según la dirección y sentido  $OX$ . Se levanta entonces un viento en la dirección y sentido  $OY$ , de modo que por cada 2 metros que trata de andar siguiendo  $OX$ , es desplazado 1 metro según  $OY$ .

Dibuja el itinerario que recorre el insecto y averigua si logrará finalmente llegar a la piscina.



El itinerario que sigue el insecto es el descrito por el vector  $\overrightarrow{OB}$ , obtenido por la suma de los vectores  $\overrightarrow{OA'}$  y  $\overrightarrow{A'B'}$ ,  $\overrightarrow{B'A''}$  y  $\overrightarrow{A''B''}$ ,  $\overrightarrow{B''A'''}$  y  $\overrightarrow{A'''B'''}$ .

El punto  $B$  al que llega tiene de coordenadas:  $B(6, 3)$ ; luego, finalmente no logrará llegar a la piscina.

## Relaciones métricas

### Ejercicio resuelto

- 9.25 Los vértices de un triángulo son  $A(2, 3)$ ,  $B(4, 6)$  y  $C(10, 2)$ .

a) ¿Es un triángulo rectángulo?

b) Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados.

$$a = d(A, B) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} u$$

$$b = d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{52} u$$

$$c = d(C, A) = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65} u$$

El triángulo es rectángulo porque se cumple el teorema de Pitágoras:  $c^2 = a^2 + b^2$ ;  $65 = 13 + 52$ .

b) Llamemos  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  a los puntos medios de los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$ .

$$M_1\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+6}{2}\right) \Rightarrow M_1(3; 4,5) \quad M_2\left(\frac{4+10}{2}, \frac{6+2}{2}\right) \Rightarrow M_2(7, 4) \quad M_3\left(\frac{10+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) \Rightarrow M_3(6; 2,5)$$

### PARA PRACTICAR

- 9.26 Halla el módulo del vector de posición del punto  $A(-4, 3)$ .

El vector de posición del punto  $A$  es el vector  $\overrightarrow{OA} = (-4, 3)$ .

$$|\overrightarrow{OA}| = d(O, A) = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5u$$

El módulo es  $5u$ .

**9.27** Halla  $k$  para que los vectores  $\vec{u} = (5, 12)$  y  $\vec{v} = (3, k)$  tengan el mismo módulo.

Si  $\vec{OA}$  es un representante de  $\vec{u}$  con origen  $O$ :

$$\vec{OA} = (5, 12). \quad |\vec{u}| = |\vec{OA}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 u$$

$$\text{Análogamente: } |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + k^2} = \sqrt{9 + k^2} u$$

$$\text{Por tanto: } 13 = \sqrt{9 + k^2} \Rightarrow 169 = 9 + k^2 \Rightarrow k^2 = 160 \Rightarrow k = \pm\sqrt{160} = \pm 4\sqrt{10}.$$

**9.28** Las coordenadas de los vértices de un triángulo son  $A(5, 2)$ ,  $B(2, 1)$  y  $C(4, 5)$ . Averigua si el triángulo es:

a) Equilátero

b) Rectángulo

Se hallan las longitudes de los lados:

$$\vec{AB} = (2 - 5, 1 - 2) = (-3, -1) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} u$$

$$\vec{BC} = (4 - 2, 5 - 1) = (2, 4) \Rightarrow |\vec{BC}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} u$$

$$\vec{CA} = (5 - 4, 2 - 5) = (1, -3) \Rightarrow |\vec{CA}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} u$$

a) El triángulo no es equilátero; es isósceles, pues tiene dos lados iguales y el otro no es igual a ellos.

b)  $(2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2$ , pues  $20 = 10 + 10$ .

Como se cumple el teorema de Pitágoras el triángulo sí es rectángulo.

**9.29** Halla las coordenadas del punto simétrico de  $A(2, 5)$  respecto del punto  $P(1, 2)$ .

Si  $B(b_1, b_2)$  es el simétrico de  $A$  respecto de  $P$ ,  $P$  debe ser el punto medio del segmento  $AB$ :

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{2 + b_1}{2} \\ 2 &= \frac{5 + b_2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_1 = 0 \text{ y } b_2 = -1. \text{ Las coordenadas del simétrico son: } B(0, -1).$$

**9.30** Los vértices de la base de un triángulo son los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(4, -2)$ . Si el área del triángulo es 10 unidades de superficie, ¿cuánto mide la altura correspondiente al lado  $AB$ ?

Si  $h$  es la altura:

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB}| \cdot h}{2} \quad \vec{AB} = (4 - 1, -2 - 2) = (3, -4) \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 u \Rightarrow 10 = \frac{5 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 4 u$$

**9.31** Las coordenadas de los extremos de un segmento  $AB$  son  $A(-3, 5)$  y  $B(6, -1)$ . Halla las coordenadas de los puntos que dividen el segmento  $AB$  en tres partes iguales.

Si los puntos son  $M$  y  $N$  se debe cumplir que  $\vec{AB} = 3\vec{AM}$  y  $\vec{AB} = 3\vec{NB}$ .

Si  $M(x, y)$ , entonces:  $\vec{AB} = (6 + 3, -1 - 5) = (9, -6)$ ,  $\vec{AM} = (x + 3, y - 5)$ ,

$$(9, -6) = 3(x + 3, y - 5) = (3x + 9, 3y - 15) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 9 = 9 \\ 3y - 15 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0, 3).$$

Si  $N(x', y')$ , entonces:  $\vec{AB} = (9, -6)$ ,  $\vec{NB} = (6 - x', -1 - y')$ ,

$$(9, -6) = 3(6 - x', -1 - y') = (18 - 3x', -3 - 3y') \Rightarrow \begin{cases} 18 - 3x' = 9 \\ -3 - 3y' = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow N(3, 1).$$

Los puntos son  $M(0, 3)$  y  $N(3, 1)$ .

**9.32** Halla las coordenadas de los puntos que dividen el segmento  $AB$  en cuatro partes iguales si  $A(-4, -3)$  y  $B(8, 1)$ .

$$\text{Si } M \text{ es el punto medio de } \vec{AB}: M\left(\frac{-4 + 8}{2}, \frac{-3 + 1}{2}\right) \Rightarrow M(2, -1)$$

$$\text{Hallamos } N, \text{ punto medio de } \vec{AM}: N\left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{-3 - 1}{2}\right) \Rightarrow N(-1, -2)$$

$$\text{Hallamos } P, \text{ punto medio de } \vec{MB}: P\left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{-1 + 1}{2}\right) \Rightarrow P(5, 0)$$

Los puntos que dividen el segmento  $AB$  en cuatro partes iguales son:  $N(-1, -2)$ ,  $M(2, -1)$  y  $P(5, 0)$ .

- 9.33 Si elegimos la casa **A** como origen de coordenadas, calcula las coordenadas de la fuente sabiendo que equidista de las tres casas.

Como  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 6)$ , los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$  deben tener de ordenada

$$y = \frac{0 + 6}{2} = 3.$$

Como  $A(0, 0)$ ,  $C(8, 0)$ , los puntos que equidistan de  $A$  y  $C$  deben tener de abscisa

$$x = \frac{0 + 8}{2} = 4$$

Por tanto, el punto que equidista de los tres, en el cual hay que construir la fuente, es el  $F(4, 3)$ .



- 9.34 Los vértices de un cuadrilátero son:

$A(-4, -5)$ ,  $B(-6, 7)$ ,  $C(4, 5)$  y  $D(2, -3)$ .

- a) Halla las coordenadas de los vértices del cuadrilátero **MNPQ** obtenido uniendo los puntos medios de los lados del cuadrilátero **ABCD**.  
b) Calcula el perímetro del cuadrilátero **MNPQ** y la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero **ABCD**. ¿Qué observas?

a) Punto medio de  $\overline{AB}$ :  $M\left(\frac{-4 - 6}{2}, \frac{-5 + 7}{2}\right) \Rightarrow M(-5, 1)$

Punto medio de  $\overline{BC}$ :  $N\left(\frac{-6 + 4}{2}, \frac{7 + 5}{2}\right) \Rightarrow N(-1, 6)$

Punto medio de  $\overline{CD}$ :  $P\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{5 - 3}{2}\right) \Rightarrow P(3, 1)$

Punto medio de  $\overline{DA}$ :  $Q\left(\frac{2 - 4}{2}, \frac{-3 - 5}{2}\right) \Rightarrow Q(-1, -4)$

b)  $|\overline{MN}| = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} u$

$|\overline{NP}| = \sqrt{(3 + 1)^2 + (1 - 6)^2} = \sqrt{41} u$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{41} u$

$|\overline{QM}| = \sqrt{(-5 + 1)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{41} u$

Perímetro (**MNPQ**) =  $4\sqrt{41} u$ .

Las diagonales son  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ :

$|\overline{AC}| = \sqrt{(4 + 4)^2 + (5 + 5)^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} = u$

$|\overline{BD}| = \sqrt{(2 + 6)^2 + (-3 - 7)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41} u$

$|\overline{AC}| + |\overline{BD}| = 4\sqrt{41} u$ .

El perímetro del cuadrilátero **MNPQ** y la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero **ABCD** son iguales.

- 9.35 Las baldosas del suelo de la habitación de la figura miden  $30 \times 30$  centímetros. Ángel está situado en el punto **A**, y Blanca, en el **B**.

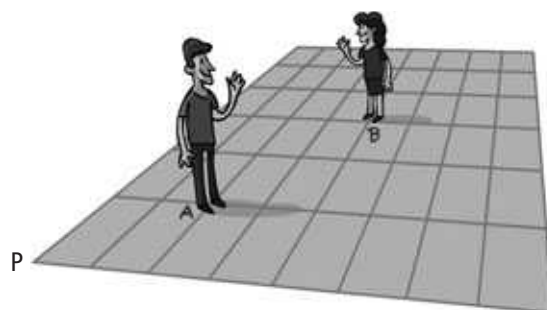
- a) Halla las coordenadas de **A** y **B** considerando como origen de coordenadas la puerta de la habitación.

- b) ¿Qué distancia hay entre Ángel y Blanca?

- a) Las coordenadas de los puntos son:  
 $A(60, 30)$  y  $B(120, 120)$

- b) La distancia entre Ángel y Blanca será:

$|\overline{AB}| = \sqrt{(120 - 60)^2 + (120 - 30)^2} = \sqrt{60^2 + 90^2} = \sqrt{11700} \approx 108,17 \text{ cm}$





- 9.36 Un avión vuela con una velocidad de 800 kilómetros por hora. Primero se desplaza en dirección sur durante 2 horas y después en dirección este durante 1 hora y media.

a) Representa mediante vectores su trayectoria.

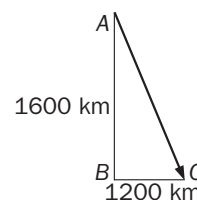
b) Calcula la distancia entre el origen y el final del trayecto.

- a) En 2 horas recorre  $800 \cdot 2 = 1600$  km; en 1 hora y media recorre  $800 \cdot 1,5 = 1200$  km.

Si sale, por ejemplo, del punto A, su desplazamiento en dirección sur viene representado por el vector  $\overrightarrow{AB}$ , y su desplazamiento en dirección este, por el vector  $\overrightarrow{BC}$ . El final del trayecto es el punto C.

- b)  $d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1600^2 + 1200^2} = \sqrt{4\,000\,000} = 2000$

La distancia entre el origen y el final del trayecto es 2000 km.



- 9.37 Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos  $O(0, 0)$ ,  $C(4, 0)$  y  $B(0, 3)$ .

a) Halla las coordenadas del punto medio de la hipotenusa M.

b) Calcula las distancias de M a cada uno de los tres vértices. ¿Qué observas?

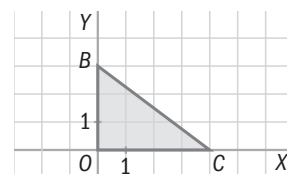
- a)  $M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+3}{2}\right) \Rightarrow M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

Las coordenadas del punto medio de la hipotenusa son:  $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

- b)  $d(M, O) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} u$        $d(M, B) = \sqrt{(4-2)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} u$

$$d(M, C) = \sqrt{(0-2)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2} u$$

Las distancias de M a cada uno de los vértices son iguales.



- 9.38 Se va a plantar un pino en un jardín entre el abeto, situado en el punto  $(1, 2)$ , y el cedro, situado en el punto  $(5, 3)$  de manera que quede alineado con sus bases.

Halla las coordenadas del punto en el que ha de plantarse el pino si la razón de las distancias del pino al abeto y al cedro debe ser  $\frac{3}{5}$ .

Si la base del pino es el punto  $P(x, y)$ :  $\frac{AP}{PC} = \frac{3}{5}$

Luego  $5\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PC}$ . Como  $A(1, 2)$ ,  $C(5, 3)$ , se tiene:  $5(x-1, y-2) = 3(5-x, 3-y) \Rightarrow \begin{cases} 5x-5 = 15-3x \\ 5y-10 = 9-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 20 \\ 8y = 19 \end{cases}$

Las coordenadas de P son:  $P\left(\frac{5}{2}, \frac{19}{8}\right)$ .

- 9.39 Dado el triángulo de vértices los puntos  $A(-1, -2)$ ,  $B(2, 0)$  y  $C(1, 1)$ :

a) Prueba que es isósceles.

b) Halla la longitud de la altura correspondiente al lado BC.

c) Calcula su área.

- a)  $|\overrightarrow{AB}| = d(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{13} u$

$$|\overrightarrow{BC}| = d(B, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{2} u$$

$$|\overrightarrow{CA}| = d(C, A) = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13} u$$

Como  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| \neq |\overrightarrow{BC}|$ , el triángulo es isósceles.

- b) En un triángulo isósceles, la altura corta al lado desigual en el punto medio. Si M es el punto medio de

$$\overrightarrow{BC}: M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{La longitud de la altura es: } h = d(A, M) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} u$$

- c) Área =  $\frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2} u^2$ .

## Ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta

### PARA PRACTICAR

9.40 Halla un punto y un vector director de las rectas cuyas ecuaciones son las siguientes.

a)  $(x, y) = t(3, -5)$       b)  $(x, y) = (2, 0) + (7t, t)$       c)  $(x, y) = (-t, 0)$       d)  $(x, y) = (1 + t, 2 - t)$

a)  $(x, y) = t(3, -5)$  Punto:  $A(0, 0)$ , vector director:  $\vec{u} = (3, -5)$ .

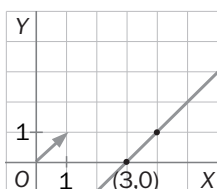
b)  $(x, y) = (2, 0) + t(7, 1)$ . Punto:  $A(2, 0)$ , vector director:  $\vec{u} = (7, 1)$ .

c)  $(x, y) = t(-1, 0)$ . Punto:  $A(0, 0)$ , vector director:  $\vec{u} = (-1, 0)$ .

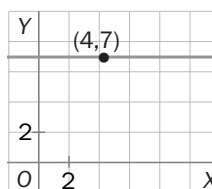
d)  $(x, y) = (1, 2) + t(1, -1)$ . Punto:  $A(1, 2)$ , vector director:  $\vec{u} = (1, -1)$ .

9.41 Representa gráficamente las rectas dadas por las ecuaciones siguientes.

a)  $(x, y) = (3, 0) + t(1, 1)$



b)  $(x, y) = (4, 7) + t(1, 0)$



9.42 A continuación se dan las ecuaciones de cuatro rectas.

$r_1: (x, y) = (3, -1) + t(2, 0)$

$r_3: (x, y) = t(1, 5)$

$r_2: (x, y) = (6, 4) + t(0, -3)$

$r_4: (x, y) = t(1, 0)$

Indica cuáles de ellas:

a) Son paralelas al eje OX.

b) Son paralelas al eje OY.

c) Pasan por el origen de coordenadas.

a) Las rectas  $r_1$  y  $r_4$  son paralelas al eje OX, porque sus vectores directores son  $(2, 0)$  y  $(1, 0)$ , respectivamente.

b) La recta  $r_3$  es paralela al eje OY, porque su vector director es  $(0, -3)$ .

c) Las rectas  $r_3$  y  $r_4$  pasan por el origen de coordenadas.

9.43 Un vector director de una recta es  $\vec{u} = (2, 3)$ . Halla  $a$  y  $b$  para que  $\vec{v}_1 = (a, 1)$  y  $\vec{v}_2 = (5, b)$  sean también vectores directores de la misma.

Los vectores directores de una recta son proporcionales. Por tanto:

$$\frac{2}{a} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{b} \Rightarrow 2b = 15 \Rightarrow b = \frac{15}{2}$$

9.44 Averigua si los puntos  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, -4)$  y  $C(1, -1)$  pertenecen a la recta de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

Se sustituyen las coordenadas del punto en las ecuaciones paramétricas y el sistema debe de tener una solución única para  $t$ :

$$A(2, 1): \begin{cases} 2 = t \\ 1 = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow A \text{ pertenece a la recta.}$$

$$B(-1, -4): \begin{cases} -1 = t \\ -4 = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B \text{ no pertenece a la recta.}$$

$$C(1, -1): \begin{cases} 1 = t \\ -1 = -3 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow C \text{ pertenece a la recta.}$$

## Ejercicio resuelto

9.45 Comprueba que las siguientes ecuaciones representan la misma recta.

$$r: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 - 3t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 6t \end{cases}$$

Obtenemos un punto y un vector director:

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 - 3t \end{cases} \Rightarrow A(4, 5); \vec{u} = (-1, -3) \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 6t \end{cases} \Rightarrow B(1, -4); \vec{v} = (2, 6)$$

Como  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son proporcionales, si se trata de la misma recta, el punto  $A(4, 5)$  cumplirá también las ecuaciones de  $s$ .

$$4 = 1 + 2t \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$y = -4 + 6 \cdot \frac{3}{2} = -4 + 9 = 5$$

Como el punto  $A$  pertenece al mismo tiempo a  $r$  y a  $s$ , ambas ecuaciones representan la misma recta.

9.46 ¿Qué valor debe tomar  $k$  para que las siguientes ecuaciones definan la misma recta?

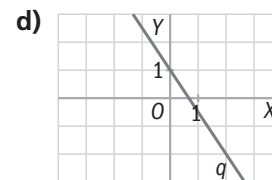
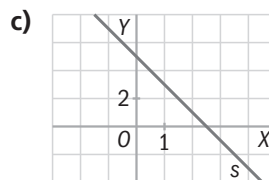
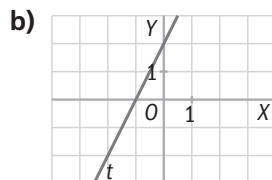
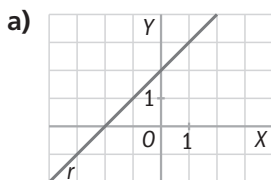
$$r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = k - 4t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + 2t \end{cases} \Rightarrow A: (3, -5), \vec{u} = (1, 2) \quad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = k - 4t \end{cases} \Rightarrow B: (1, k), \vec{v} = (-2, -4)$$

Los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son proporcionales. También debe ser proporcional a ellos el vector  $\overrightarrow{AB} = (1 - 3, k + 5) = (-2, k + 5)$ ; luego  $\frac{1}{-2} = \frac{2}{k + 5} \Rightarrow k + 5 = -4 \Rightarrow k = -9 \Rightarrow k$  debe valer  $-9$ .

## PARA APLICAR

9.47 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas cuyas gráficas se muestran a continuación.



Considerando dos puntos  $A$  y  $B$  de cada recta, se calcula un vector director  $\overrightarrow{AB}$ .

a)  $A(-2, 0)$  y  $B(0, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, 2)$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (0, 2) + t(2, 2)$$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

b)  $A(-1, 0)$  y  $B(0, 2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (0, 2) + t(1, 2)$$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

c)  $A(0, \frac{5}{2})$  y  $B(\frac{3}{2}, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}) = (3, -5)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (0, \frac{5}{2}) + t(3, -5)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{5}{2} - 5t \end{cases}$

d)  $A(1, 1)$  y  $B(2, -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2, -3)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (0, 1) + t(2, -3)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$

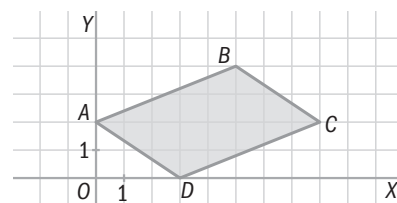
9.48 Halla la ecuación vectorial de las rectas correspondientes a los lados de la figura.

$AB$ : punto  $A(0, 2)$ , vector director  $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ . Ecuación:  $(x, y) = (0, 2) + t(5, 2)$ .

$BC$ : punto  $B(5, 4)$ , vector director  $\overrightarrow{BC} = (3, -2)$ . Ecuación:  $(x, y) = (5, 4) + t(3, -2)$ .

$CD$ : punto  $C(8, 2)$ , vector director  $\overrightarrow{CD} = (-5, -2)$ . Ecuación:  $(x, y) = (8, 2) + t(-5, -2)$ .

$DA$ : punto  $D(3, 0)$ , vector director  $\overrightarrow{DA} = (-3, 2)$ . Ecuación:  $(x, y) = (3, 0) + t(-3, 2)$ .



9.49 Una recta  $r$  pasa por el punto  $A(5, 7)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = (2, 1)$ .

a) Escribe la ecuación vectorial de la recta.

b) Halla el valor de  $k$  tal que el punto  $B(1, k)$  pertenezca a la recta.

c) Halla las coordenadas de otros dos puntos de  $r$ .

a) Ecuación vectorial de la recta:  $(x, y) = (5, 7) + t(2, 1)$ .

b) Si  $B(1, k)$  pertenece a la recta:

$$(1, k) = (5, 7) + t(2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 5 + 2t \\ k = 7 + t \end{cases} \Rightarrow t = k - 7, \quad 1 = 5 + 2k - 14 \Rightarrow k = 5.$$

c) Damos valores a  $t \neq 0$  en la ecuación vectorial. Por ejemplo:

$$t = 1 \Rightarrow (x, y) = (5, 7) + (2, 1) \Rightarrow C(7, 8)$$

$$t = -1 \Rightarrow (x, y) = (5, 7) - (2, 1) \Rightarrow D(3, 6)$$

Otros dos puntos de  $r$  son  $C(7, 8)$  y  $D(3, 6)$ .

9.50 Los puntos  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 5)$  y  $C(6, 1)$  son los vértices de un triángulo. Halla las ecuaciones paramétricas de sus medianas.

Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

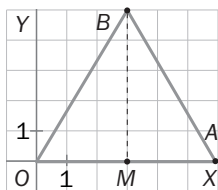
Punto medio de  $AB$ :  $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ . Punto medio de  $BC$ :  $N(4, 3)$ . Punto medio de  $CA$ :  $P\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Mediana correspondiente al lado  $AB$ : punto  $C(6, 1)$ , vector director  $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{3}{2} - 6, \frac{7}{2} - 1\right) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ . Ecuaciones:  $\begin{cases} x = 6 - \frac{9}{2}t \\ y = 1 + \frac{5}{2}t \end{cases}$

Mediana correspondiente al lado  $BC$ : punto  $A(1, 2)$ , vector director  $\overrightarrow{AN} = (4 - 1, 3 - 2) = (3, 1)$ . Ecuaciones:  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$

Mediana correspondiente al lado  $CA$ : punto  $B(2, 5)$ , vector director:  $\overrightarrow{BP} = \left(\frac{7}{2} - 2, \frac{3}{2} - 5\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ . Ecuaciones:  $\begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2}t \\ y = 5 - \frac{7}{2}t \end{cases}$

9.51 Los puntos  $O(0, 0)$  y  $A(6, 0)$  son vértices de un triángulo equilátero situado en el primer cuadrante. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas correspondientes a sus lados.



Si consideramos a  $OA$  como base, su altura será una recta vertical. Por ser el triángulo equilátero la altura coincidirá con la mediana. El lado  $OA$  mide 6 unidades, y su punto medio es  $M = (3, 0)$ . Su altura es la recta que pasa por  $M$  y tiene por vector director  $\vec{u} = (0, 1)$ .

Si en un triángulo equilátero el lado es  $l$ , la altura es:  $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, el vértice restante  $B$  del triángulo será:  $B\left(3, \frac{6\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow B(3, 3\sqrt{3})$ .

Ecuaciones del lado  $OA$ :  $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ . Como  $\overrightarrow{OB} = (3, 3\sqrt{3})$ . Ecuaciones del lado  $OB$ :  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 3\sqrt{3}t \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} = (-3, 3\sqrt{3})$  Ecuaciones del lado  $AB$ :  $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 3\sqrt{3}t \end{cases}$

**9.52 Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas correspondientes a los lados de la siguiente figura.**

Consideramos dos puntos y el vector director de cada recta:

a)  $A(2, 1), B(1, 4)$  y  $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (2, 1) + t(-1, 3)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

b)  $B(1, 4), C(4, 6)$  y  $\overrightarrow{BC} = (3, 2)$

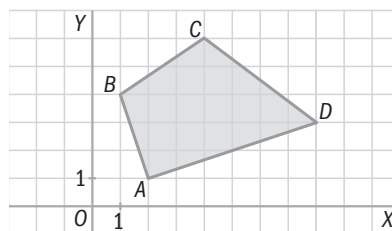
Ecuación vectorial:  $(x, y) = (1, 4) + t(3, 2)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

c)  $C(4, 6), D(8, 3)$  y  $\overrightarrow{CD} = (4, -3)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (4, 6) + t(4, -3)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$



d)  $D(8, 3), A(2, 1)$  y  $\overrightarrow{DA} = (-6, -2) = (3, 1)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (2, 1) + t(3, 1)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$

## Otras ecuaciones de la recta

### PARA PRACTICAR

#### Ejercicio resuelto

**9.53 Halla la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos  $(1, 3)$  y  $(2, 5)$ , y después generaliza para obtener la ecuación de una recta que pasa por dos puntos cualesquiera  $A(a_1, a_2)$  y  $B(b_1, b_2)$ .**

La recta pasa por  $A(1, 3)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 5 - 3) = (1, 2)$ . Por tanto, su ecuación continua es:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 3}{2}.$$

En el caso de una recta que pasa por  $A(a_1, a_2)$  y  $B(b_1, b_2)$ , el vector es  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ , y la ecuación es:  $\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$ .

**9.54 Dados los puntos  $A(-3, -1)$ ,  $B(4, 5)$  y  $C(3, 2)$ , halla la ecuación continua de las rectas que pasan por los siguientes puntos.**

a) **A y B**

b) **B y C**

c) **C y A**

a) Es la recta que pasa por  $A(-3, -1)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{AB} = (4 + 3, 5 + 1) = (7, 6)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x + 3}{7} = \frac{y + 1}{6}$

b) Es la recta que pasa por  $B(4, 5)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{BC} = (3 - 4, 2 - 5) = (-1, -3)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 5}{-3}$

c) Es la recta que pasa por  $C(3, 2)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{CA} = (-3 - 3, -1 - 2) = (-6, -3)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x - 3}{-6} = \frac{y - 2}{-3}$

**9.55 Halla la ecuación general de las rectas siguientes.**

a) **Recta horizontal situada a 3,5 unidades del eje OX.**

b) **Recta vertical que pasa por los puntos de abscisa  $-2$ .**

a) Hay dos soluciones: la recta  $y = 3,5$ , si está por encima de OX; la recta  $y = -3,5$  si está por debajo.

Sus ecuaciones generales son, respectivamente:

$y - 3,5 = 0; y + 3,5 = 0$

b) La recta es  $x = -2$ . Su ecuación general es  $x + 2 = 0$ .

9.56 Halla la pendiente de las siguientes rectas.

a)  $(x, y) = (5, 2) + t(1, 4)$

c)  $\frac{x-4}{2} = \frac{y-8}{5}$

b)  $\begin{cases} x = 7t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

d)  $x + 5y - 6 = 0$

a) Un vector director es  $\vec{v} = (1, 4)$ ,  $m = \frac{4}{1} = 4$ . La pendiente es  $m = 4$ .

b) Un vector director es  $\vec{v} = (7, -2)$ . La pendiente es  $m = -\frac{2}{7}$ .

c) Un vector director es  $\vec{u} = (2, 5)$ . La pendiente es  $m = \frac{5}{2}$ .

d) Un vector director es  $\vec{v} = (-5, 1)$ . La pendiente es  $m = -\frac{1}{5}$ .

9.57 Halla los valores de  $p$  y  $q$  para que la recta  $r$  pase por el punto  $A(2, 3)$  y tenga pendiente 2.

$$r: (2+p)x - (3-q)y + p + 14 = 0$$

Un vector director de la recta es  $\vec{u} = (3-q, 2+p)$ , y la pendiente es  $m = \frac{2+p}{3-q}$ .

Por pasar por  $A(2, 3)$ :  $(2+p) \cdot 2 - (3-q) \cdot 3 + p + 14 = 0$ .

Por tener pendiente 2:  $2 = \frac{2+p}{3-q}$

Operamos y simplificamos en el sistema:

$$\begin{cases} 4 + 2p - 9 + 3q + p + 14 = 0 \\ 6 - 2q = 2 + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p + 3q + 9 = 0 \\ p + 2q - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p + q + 3 = 0 \\ p + 2q - 4 = 0 \end{cases}$$

Restando:  $-q + 7 = 0$ ,  $q = 7 \Rightarrow p + 7 + 3 = 0 \Rightarrow p = -10$ . La solución es  $p = -10$  y  $q = 7$ .

9.58 Una recta pasa por el punto  $A(9, -2)$  y forma  $30^\circ$  con el eje positivo de abscisas. Halla las coordenadas de otros dos puntos de la recta.

Por formar  $30^\circ$  con  $OX$  su pendiente es:  $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . La ecuación de la recta es:  $y + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 9)$ .

Para hallar dos puntos, damos valores:

$$x = 0 \Rightarrow y + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-9) \Rightarrow y + 2 = -3\sqrt{3} \Rightarrow y = -2 - 3\sqrt{3} \Rightarrow P(0, -2 - 3\sqrt{3})$$

$$y = 0 \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 9) \Rightarrow x - 9 = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = 9 + 2\sqrt{3} \Rightarrow Q(9 + 2\sqrt{3}, 0)$$

9.59 Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 3)$  y tiene una inclinación de  $45^\circ$ .

La pendiente es:  $m = \tan 45^\circ = 1$ . Ecuación de la recta:  $y - 3 = 1 \cdot (x + 1)$ .

9.60 Expresa las siguientes ecuaciones en forma general, punto-pendiente y explícita.

a)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}$

b)  $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2t \end{cases}$

a)  $3(x-1) = 2(y+1) \Rightarrow 3x - 3 = 2y + 2 \Rightarrow 3x - 2y - 5 = 0$ .

Ecuación general:  $3x - 2y - 5 = 0$ .

Despejamos  $y + 1$  en la ecuación continua:  $y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$ : ecuación punto-pendiente.

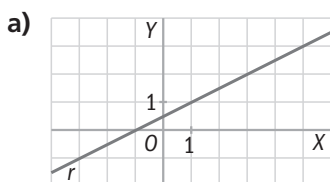
Despejamos  $y$  en la ecuación general:  $3x - 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ : ecuación explícita.

b) Despejamos  $t$  e igualamos:  $x - 3 = -\frac{y}{2} \Rightarrow 2x - 6 = -y \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$ : ecuación general.

Despejamos  $y$ :  $y = -2x + 6$ : ecuación explícita.

$y = -2(x - 3)$ : ecuación punto-pendiente.

**9.61 Escribe todas las ecuaciones de las rectas que se representan a continuación.**



- a)  $A(1, 1)$  y  $B(5, 3)$  son puntos de la recta. El vector director de la recta es  $\vec{AB} = (4, 2)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (1, 1) + t(4, 2)$

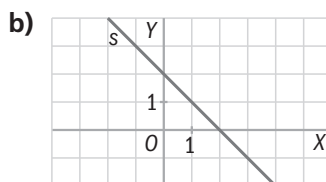
Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Ecuación en forma continua:  $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2}$

Ecuación en forma general:  $2(x-1) = 4(y-1) \Rightarrow \Rightarrow 2x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow x - 2y + 1 = 0$

Ecuación explícita:  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Ecuación punto pendiente:  $y = \frac{1}{2}(x + 1)$



- b)  $A(2, 0)$  y  $B(0, 2)$  son puntos de la recta. El vector director de la recta es  $\vec{AB} = (-2, 2)$

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (2, 0) + t(-2, 2)$

Ecuación en paramétricas:  $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2t \end{cases}$

Ecuación en forma continua:  $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{2}$

Ecuación en forma general:  $2(x-2) = -2y \Rightarrow \Rightarrow 2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

Ecuación explícita:  $y = -x + 2$

Ecuación punto pendiente:  $y = -1(x - 2)$

**PARA APLICAR**

**Problema resuelto**

**9.62 Halla el valor que debe tomar  $k$  para que el punto  $A(3, k)$  pertenezca a la recta determinada por los puntos  $B(-3, 4)$  y  $C(0, 5)$ .**

La ecuación de la recta que pasa por  $B$  y  $C$  es:  $\frac{x+3}{0+3} = \frac{y-4}{5-4} \Rightarrow \frac{x+3}{3} = y-4$

Para que  $A(3, k)$  pertenezca a ella, sus coordenadas deben verificar la ecuación:  $\frac{3+3}{3} = k-4 \Rightarrow k=6$

Por tanto, el valor que debe tomar  $k$  es 6.

**9.63 Averigua, sin dibujarlos, si están alineados los siguientes puntos.**

- a)  $A(-1, 6)$ ,  $B(2, 2)$  y  $C(3, 0)$

- b)  $D(-1, 6)$ ,  $E(2, 2)$  y  $F(5, -2)$

- a) Hallamos la ecuación de la recta  $AB$  y comprobamos si  $C$  pertenece o no a ella:

$$AB: \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-6}{2-6} \Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-6}{-4}$$

$C(3, 0)$ :  $\frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \neq \frac{0-6}{-4}$ , luego  $C$  no pertenece a la recta  $AB$ . Los puntos no están alineados.

- b) Recta  $DE$ :  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-6}{-4}$

$F(5, -2)$ :  $\frac{5+1}{3} = 2$ ;  $\frac{-2-6}{-4} = 2$  luego  $F$  pertenece a la recta  $DE$ . Los puntos están alineados.

**9.64 Halla las coordenadas del punto perteneciente a la recta  $y - 2x = 0$  que equidista de los puntos  $A(1, 8)$  y  $B(5, 4)$ .**

Si un punto  $P$  pertenece a la recta  $y - 2x = 0$ , es que las coordenadas del punto verifican  $y = 2x$ , luego será  $P(k, 2k)$ .

$$d(P, A) = \sqrt{(1-k)^2 + (8-2k)^2} \quad d(P, B) = \sqrt{(5-k)^2 + (4-2k)^2}$$

$d(P, A) = d(P, B)$ . Igualamos y elevamos al cuadrado:  $(1-k)^2 + (8-2k)^2 = (5-k)^2 + (4-2k)^2$

Operando:

$$1 - 2k + k^2 + 64 - 32k + 4k^2 = 25 - 10k + k^2 + 16 - 16k + 4k^2 \Rightarrow -34k + 65 = -26k + 41 \Rightarrow 24 = 8k \Rightarrow k = 3.$$

El punto es  $P(3, 6)$ .

9.65 Eva e Inés recorren un camino en un parque natural. Eva sale de la cabaña y, en el mismo instante, Inés, parte de un kilómetro más adelante. Las dos caminan a una velocidad constante de 4 kilómetros por hora.

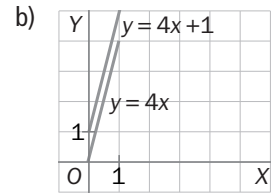
- a) Calcula la distancia de cada una a la cabaña en el momento de partida y una hora después.  
b) Dibuja las rectas correspondientes a la distancia de cada una a la cabaña en función del tiempo y halla sus ecuaciones.

- a) Considerando  $x$  = tiempo en horas caminando  
 $y$  = distancia en kilómetros a la cabaña

Se pueden relacionar mediante las ecuaciones: Eva:  $y = 4x$  Inés:  $y = 1 + 4x$

En el momento de partida Eva está a  $4 \cdot 0 = 0$  kilómetros, e Inés a  $1 + 4 \cdot 0 = 1$  kilómetro.

Al cabo de una hora la distancia a la cabaña de Eva es de  $4 \cdot 1 = 4$  kilómetros y la de Inés es  $1 + 4 \cdot 1 = 5$  kilómetros.



9.66 Halla la ecuación punto-pendiente de una recta que pasa por el punto  $A(-2, -4)$  y que determina con los ejes de coordenadas dos segmentos cuyas longitudes suman 3 unidades.

Por pasar por A, la ecuación de la recta en forma punto pendiente es  $y + 4 = m(x + 2)$ .

Puntos de corte con los ejes:  $x = 0 \Rightarrow y + 4 = 2m \Rightarrow y = 2m - 4$ ;  $y = 0 \Rightarrow 4 = m(x + 2) \Rightarrow x = \frac{4}{m} - 2$

Luego las longitudes de los segmentos que determina con los ejes son  $2m - 4$  y  $\frac{4}{m} - 2$ .

Por tanto:

$$2m - 4 + \frac{4}{m} - 2 = 3 \Rightarrow 2m + \frac{4}{m} - 9 = 0 \Rightarrow 2m^2 - 9m + 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm 7}{4} = \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos rectas que lo verifican. Sus ecuaciones son:  $y + 4 = 4(x + 2)$ ,  $y + 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$ .

## Posiciones relativas de dos rectas

### PARA PRACTICAR

9.67 Halla la posición relativa de las siguientes rectas y, en su caso, el punto de intersección.

$r: 2x + 3y - 6 = 0$

$s: x - y + 2 = 0$

$t: 4x + y - 2 = 0$

$r$  y  $s$  son secantes: tienen distinta pendiente: se cortan en  $A(0, 2)$ .  $s$  y  $t$  son secantes: se cortan en  $B(0, 2)$ .  $r$  y  $t$  son secantes: se cortan en  $C(0, 2)$ . Así pues,  $r$ ,  $s$  y  $t$  son secantes y se cortan en un mismo punto, el punto  $(0, 2)$ .

9.68 Si tres rectas son secantes dos a dos, ¿se puede asegurar que las tres pasan por el mismo punto?

No se puede asegurar que las tres pasen por el mismo punto. Puede suceder:

- Que las tres pasen por el mismo punto  $P$ .
- O bien que las tres se corten dos a dos en puntos distintos, en cuyo caso determinarían un triángulo.

### Ejercicio resuelto

9.69 Estudia la posición relativa de las siguientes rectas dependiendo de los valores de  $a$  y  $b$ .

$r: y = 3x + 1$      $s: y = ax + b$ .

Si  $a \neq 3$ , las rectas tienen distinta pendiente y, por tanto, son secantes. Si  $a = 3$ , las rectas tienen la misma pendiente, y serán paralelas si las ordenadas en el origen son diferentes, y coincidentes si estas son iguales.

Secantes:  $a \neq 3$ . Paralelas:  $a = 3, b \neq 1$ . Coincidentes:  $a = 3, b = 1$

9.70 Estudia la posición relativa de las siguientes rectas dependiendo de los valores de  $a$  y  $b$ .

$r: 2x - 3y + 7 = 0$      $s: y = ax - 2b$

Expresamos las dos rectas, por ejemplo, en forma explícita:  $\begin{cases} r: y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\ s: y = ax - 2b \end{cases}$

Si  $a \neq \frac{2}{3}$ , las rectas tienen distinta pendiente y, por tanto, son secantes.

Si  $a = \frac{2}{3}$  y  $\frac{7}{3} \neq -2b$ ; o sea,  $b \neq -\frac{7}{6}$ , las rectas son paralelas.

Si  $a = \frac{2}{3}$  y  $\frac{7}{3} = -2b$ ; o sea,  $b = -\frac{7}{6}$ , las rectas son coincidentes.



9.71 Calcula el valor que debe tomar  $k$  para que las siguientes rectas sean paralelas.

$$r: 2x - 3y + 5 = 0 \quad s: y - 1 = kx$$

¿Existe algún valor de  $k$  para el cual las rectas sean coincidentes?

En forma implícita:  $\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 5 = 0 \\ kx - y + 1 = 0 \end{array} \right\}$  Para que sean paralelas:  $\frac{2}{k} = \frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{1} \Rightarrow -2 = -3k \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

No existe algún valor  $k$  para el cual sean coincidentes, pues  $\frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{-3}{-1}$  no coincide con  $\frac{5}{1}$ .

9.72 Considera las siguientes rectas:  $r: ax - by + 1 = 0$   $s: 3x - 2y = 0$ .

Calcula  $a$  y  $b$  para que  $r$  sea paralela a  $s$  y corte el eje de abscisas en  $x = -4$ .

Para que sean paralelas, debe ser:  $\frac{a}{3} = \frac{-b}{-2} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow 2a = 3b$ .

Por cortar al eje de abscisas en  $x = -4$ , pasa por el punto  $(-4, 0)$ :  $-4a - b \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ .

Por tanto:  $2 \cdot \frac{1}{4} = 3b \Rightarrow 3b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{6}$ . Solución:  $a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{6}$

9.73 Halla la ecuación de la recta que es paralela a la recta  $5x + y - 2 = 0$ , y pasa por el punto de intersección de las siguientes rectas:  $r: 2x - 3y - 4 = 0$   $s: 3x - y + 1 = 0$ .

Hallamos el punto de intersección de  $r$  y  $s$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y - 4 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y - 4 = 0 \\ y = 3x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3(3x + 1) - 4 = 0 \\ y = 3x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 9x - 3 - 4 = 0 \\ y = 3x + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -1, y = -2 \Rightarrow P(-1, -2)$$

Las rectas paralelas a  $5x + y - 2 = 0$  son de la forma  $5x + y + k = 0$ .

Por pasar por  $P(-1, -2)$ :  $5 \cdot (-1) + (-2) + k = 0 \Rightarrow k = 7$ . La ecuación de la recta pedida es  $5x + y + 7 = 0$ .

#### PARA APLICAR

#### Problema resuelto

9.74 Sean las rectas dadas por las ecuaciones siguientes:  $r: x + 5y - 1 = 0$   $s: 3x - y + 1 = 0$

a) Comprueba que son secantes.

c) Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 2)$  y por el punto de intersección de  $r$  y  $s$ .

b) Halla el punto de intersección.

a) Como  $\frac{1}{3} \neq \frac{5}{-1}$ , son secantes.

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones, obteniendo el punto de intersección  $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

c) Un vector director de la recta que pasa por  $A(-1, 2)$  y  $P\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  es  $\overrightarrow{AP}\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ .

Tomamos por comodidad el vector proporcional:  $\vec{v} = 4 \cdot \overrightarrow{AP} = (3, -7)$ .

Como  $\vec{v} = (-B, A)$ , la ecuación general es:  $-7x - 3y + c = 0$ .

$A$  pertenece a la recta, por tanto, debe cumplir su ecuación:  $-7(-1) - 3 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow -7x - 3y - 1 = 0$ .

Si multiplicamos por  $-1$ , obtenemos una ecuación equivalente más sencilla:  $7x + 3y + 1 = 0$ .

9.75 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas  $5x - 3y + 3 = 0$  y  $x - y + 1 = 0$ , y que corta el eje de abscisas en el punto  $x = -2$ .

Se resuelve el sistema:  $\left. \begin{array}{l} 5x - 3y + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = y - 1$

$5(y - 1) - 3y + 3 = 0 \Rightarrow 5y - 5 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$ .

El punto de intersección es  $A(0, 1)$ . Que corte al eje de abscisas en  $x = -2$  significa que pasa por el punto  $B(-2, 0)$ .

Recta que pasa por  $A$  y  $B$ :  $\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 1}{0 - 1} \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y - 1}{-1}$ : ecuación de la recta pedida.

- 9.76 Las ecuaciones correspondientes a dos lados de un paralelogramo son  $3x + 2y - 7 = 0$  y  $3x - y - 4 = 0$ , y el vértice no situado en dichos lados es el punto  $A(7, 3)$ . Halla las ecuaciones de los otros dos lados y las coordenadas de los restantes vértices.

Las rectas no son paralelas, pues  $\frac{3}{3} \neq \frac{2}{-1}$ , luego corresponden a dos lados adyacentes del paralelogramo.

Las ecuaciones de los otros dos lados se obtienen hallando las rectas paralelas a cada una de las anteriores que pasen por A:

Rectas paralelas a r:  $3x + 2y - 7 = 0$ :  $3x + 2y + k = 0$ . Por pasar por A:  $3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow k = -27$ .

Rectas paralelas a s:  $3x - y - 4 = 0$ :  $3x - y + k' = 0$ . Por pasar por A:  $3 \cdot 7 - 3 + k' = 0 \Rightarrow k' = -18$ .

Las ecuaciones de los otros dos lados son: t:  $3x + 2y - 27 = 0$ , u:  $3x - y - 18 = 0$ .

Las coordenadas de los vértices se hallan calculando los puntos de intersección de cada dos rectas:

$$r \text{ intersección con } u: \begin{cases} r: 3x + 2y - 7 = 0 \\ u: 3x - y + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y + 11 = 0 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}; 3x + \frac{11}{3} - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{43}{9} \Rightarrow B\left(\frac{43}{9}, -\frac{11}{3}\right)$$

$$r \text{ intersección con } s: \begin{cases} r: 3x + 2y - 7 = 0 \\ s: 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1; 3x - 1 - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, 1\right)$$

$$s \text{ intersección con } t: \begin{cases} s: 3x - y - 4 = 0 \\ t: 3x + 2y - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow -3y + 23 = 0 \Rightarrow y = \frac{23}{3}; 3x - \frac{23}{3} - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{35}{9} \Rightarrow D\left(\frac{35}{9}, \frac{23}{3}\right)$$

- 9.77 Halla el valor que deben tomar  $a$  y  $b$  para que las rectas  $ax + by + 3 = 0$ , y  $3x + 2y - 1 = 0$  sean paralelas y corten el eje de abscisas en puntos que disten 10 unidades.

Por ser paralelas:  $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$

Punto de corte con el eje de abscisas:  $ax + by + 3 = 0$ :  $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{a}$ ;  $3x + 2y - 1 = 0$ ,  $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ .

Los puntos de corte son  $A\left(-\frac{3}{a}, 0\right)$  y  $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

Distan 10 unidades:  $-\frac{3}{a} = 10 + \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{3}{a} = \frac{31}{3} \Rightarrow a = -\frac{9}{31}$  ó  $\frac{1}{3} = 10 - \frac{3}{a} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{10a - 3}{a} \Rightarrow a = \frac{9}{29}$

Si  $a = -\frac{9}{31} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot \left(-\frac{9}{31}\right)}{3} = -\frac{6}{31}$  Si  $a = \frac{9}{29} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot \frac{9}{29}}{3} = \frac{6}{29}$

Soluciones:  $a = -\frac{9}{31}$ ,  $b = -\frac{6}{31}$  y  $a = \frac{9}{29}$ ,  $b = \frac{6}{29}$ .

- 9.78 Raúl va a destinar al cultivo de verduras una superficie triangular de 25 metros cuadrados en una esquina de su parcela. ¿Por dónde debe trazar la hipotenusa del triángulo rectángulo del contorno del huerto si desea que pase por el punto donde se encuentra la fuente?



Se toman como eje de coordenadas los dos lados de la parcela en donde se va a colocar el huerto. Las coordenadas de la fuente son  $F(3, 4)$ . Las posibles hipotenusas son segmentos de rectas que pasan por F:  $y - 4 = m(x - 3)$ .

Los catetos vienen determinados por sus puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX:  $y = 0 \Rightarrow -4 = m(x - 3) \Rightarrow x = 3 - \frac{4}{m}$ .

Corte con el eje OY:  $x = 0 \Rightarrow y - 4 = m(0 - 3) \Rightarrow y = 4 - 3m$

Los catetos miden  $3 - \frac{4}{m}$  y  $4 - 3m$ . Como el área del triángulo es  $25 \text{ m}^2$ :

$$\frac{1}{2} \left(3 - \frac{4}{m}\right)(4 - 3m) = 25 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{(3m - 4)(4 - 3m)}{m} = 25 \Rightarrow (3m - 4)(4 - 3m) = 50m \Rightarrow -9m^2 + 24m - 16 - 50m = 0$$

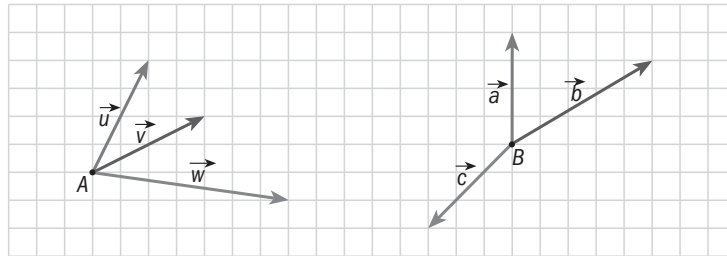
$$9m^2 + 26m + 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 576}}{18} = \frac{-26 \pm 10}{18} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{8}{9} \\ m = -2 \end{cases}$$

Hay dos posibilidades:

Si  $m = -\frac{8}{9} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$ ,  $y = \frac{20}{3}$

Si  $m = -2 \Rightarrow x = 5$ ,  $y = 10$

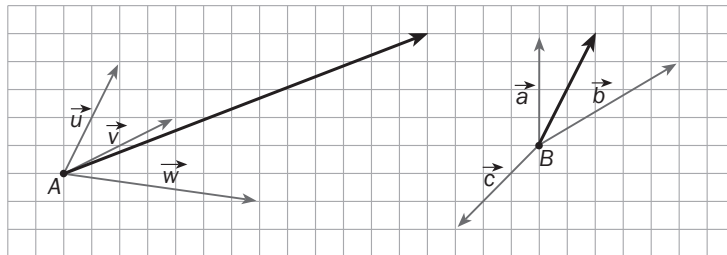
- 9.79 Copia en papel cuadriculado los siguientes vectores, que representan la situación de varios barcos remolcadores y las fuerzas que ejercen. Dibuja en cada caso la fuerza resultante y la dirección en la que avanza el barco remolcado.



Suponemos que hay tres barcos remolcadores, luego hay que hacer la suma de los tres vectores:

$$A: \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2, 4) + (4, 2) + (7, -1) = (13, 5)$$

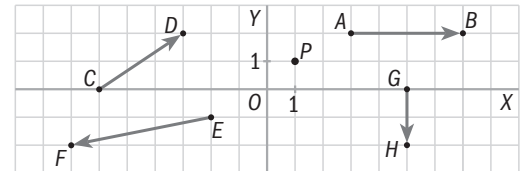
$$B: \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (0, 4) + (5, 3) + (-3, -3) = (2, 4)$$



## ACTIVIDADES FINALES

### PARA PRACTICAR Y APLICAR

- 9.80 Halla en cada caso las coordenadas del origen de un vector de extremo  $P(1, 1)$  que sea equipolente a cada vector de la figura.



$$A(3, 2), B(7, 2) \Rightarrow \vec{AB} = (4, 0)$$

$$\text{Si } M(x, y) \text{ es el origen del vector } \vec{MP} = (1 - x, 1 - y), \text{ entonces: } \begin{cases} 1 - x = 4 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(-3, 1)$$

$$C(-6, 0), D(-3, 2) \Rightarrow \vec{CD} = (3, 2)$$

$$\text{Si } N(x, y) \text{ es el origen del vector } \vec{NP} = (1 - x, 1 - y), \text{ entonces: } \begin{cases} 1 - x = 3 \\ 1 - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow N(-2, -1)$$

$$E(-2, -1), F(-7, -2) \Rightarrow \vec{EF} = (-5, -1)$$

$$\text{Si } R(x, y) \text{ es el origen del vector } \vec{RP} = (1 - x, 1 - y), \text{ entonces: } \begin{cases} 1 - x = -5 \\ 1 - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow R(6, 2)$$

$$G(5, 0), H(5, -2) \Rightarrow \vec{GH} = (0, -2)$$

$$\text{Si } S(x, y) \text{ es el origen del vector } \vec{SP} = (1 - x, 1 - y), \text{ entonces: } \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 1 - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow S(1, 3)$$

- 9.81 Expresa el vector  $\vec{w} = (-3, 4)$  como suma de dos vectores, uno de la dirección de  $\vec{u} = (-1, 2)$ , y otro de la dirección de  $\vec{v} = (1, 0)$ .

Veamos que  $\vec{w} = r\vec{u} + s\vec{v}$ , siendo  $r$  y  $s$  números reales.

$$(-3, 4) = r(-1, 2) + s(1, 0) = (-r + s, 2r)$$

$$\begin{cases} -r + s = -3 \\ 2r = 4 \end{cases} \Rightarrow r = 2, \quad -2 + s = -3 \Rightarrow s = -1$$

Expresión de  $\vec{w}$  como suma de dos vectores de la misma dirección que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ .

9.82 ¿Qué valores debe tomar  $k$  para que los siguientes puntos estén alineados?

$$A(k, 1) \quad B(3k, -7) \quad C(k - 1, k + 1)$$

Para que estén alineados, por ejemplo  $C$  debe pertenecer a la recta  $AB$ .

$$\text{Recta } AB: \frac{x - k}{3k - k} = \frac{y - 1}{-7 - 1}$$

$$\frac{x - k}{2k} = \frac{y - 1}{-8} \Rightarrow \frac{x - k}{k} = \frac{y - 1}{-4} \Rightarrow -4x + 4k = ky - k \Rightarrow 4x + ky - 5k = 0$$

Las coordenadas de  $C$  deben satisfacer la ecuación de  $AB$ :

$$4(k - 1) + k(k + 1) - 5k = 0$$

$$4k - 4 + k^2 + k - 5k = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

Para que estén alineados  $k$  debe tomar los valores 2 ó -2.

9.83 Los vértices de un paralelogramo  $ABCD$  tienen por coordenadas  $A(7, 7)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(1, 1)$  y  $D(3, 5)$ . Demuestra que es un rombo.

Hay que probar que los lados son paralelos 2 a 2 y que los 4 lados son iguales.

$$\text{Lado } AB: \text{vector director } \overrightarrow{AB} = (5 - 7, 3 - 7) = (-2, -4),$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} u$$

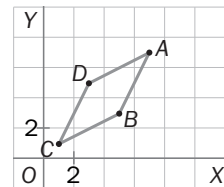
$$\text{Lado } BC: \text{vector director } \overrightarrow{BC} = (1 - 5, 1 - 3) = (-4, -2),$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} u$$

$$\text{Lado } CD: \text{vector director } \overrightarrow{CD} = (3 - 1, 5 - 1) = (2, 4), |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} u$$

$$\text{Lado } DA: \text{vector director } \overrightarrow{DA} = (7 - 3, 7 - 5) = (4, 2), |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} u$$

Los cuatro lados son iguales: miden  $2\sqrt{5} u$ . El lado  $AB$  es paralelo al  $CD$ , pues  $\overrightarrow{AB} = (-2, -4)$  y  $\overrightarrow{CD} = (2, 4)$  son proporcionales; y el lado  $BC$  es paralelo al  $DA$ , pues  $\overrightarrow{BC} = (-4, -2)$  y  $\overrightarrow{DA} = (4, 2)$  son proporcionales. Por tanto, es un rombo.



9.84 Se quieren colocar tres bancos en los puntos medios de los lados del triángulo definido por los árboles de la figura. Si elegimos el árbol  $A$  como origen de coordenadas y situamos los otros árboles sobre los ejes positivos, calcula las coordenadas de los bancos.



El banco en el punto medio entre los árboles  $A$  y  $C$  tiene coordenadas  $(0, 2)$ .

El banco en el punto medio entre los árboles  $A$  y  $B$  tiene coordenadas  $(5, 0)$ .

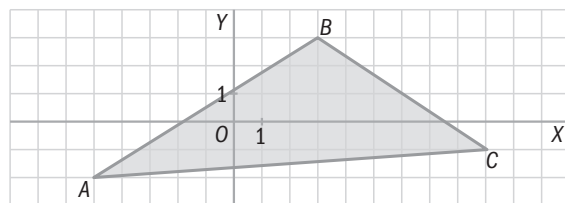
El banco en el punto medio entre los árboles  $B$  y  $C$  tiene coordenadas  $\left(\frac{0 + 10}{2}, \frac{4 + 0}{2}\right) = (5, 2)$ .

9.85 Halla las coordenadas del punto simétrico de  $A(-3, 7)$  respecto del punto  $P(-1, 4)$ .

Si las coordenadas del punto simétrico de  $A$  respecto  $P$  son  $A'(x, y)$ ,  $P$  será el punto medio entre  $A$  y  $A'$ .

$$-1 = \frac{-3 + x}{2} \Rightarrow -2 = -3 + x \Rightarrow x = 1; \quad 4 = \frac{7 + y}{2} \Rightarrow 8 = 7 + y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \text{Por tanto, } A'(1, 1).$$

9.86 Dado el triángulo  $ABC$  de la figura:



- Halla las coordenadas de  $M$ ,  $N$  y  $P$ , puntos medios de los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente.
- Demuestra que los vectores  $\overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{PN}$  y  $\overrightarrow{MP}$  son paralelos, respectivamente, a los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{CA}$ .
- ¿Qué relación existe entre las longitudes de los segmentos  $NM$ ,  $PN$  y  $MP$  y las longitudes de los lados del triángulo?

a)  $A(-5, -2)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(9, -1)$

Punto medio de  $BC$ :  $M\left(\frac{3+9}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \Rightarrow M(6, 1)$ .      Punto medio de  $CA$ :  $N\left(\frac{9-5}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) \Rightarrow N\left(2, -\frac{3}{2}\right)$

Punto medio de  $AB$ :  $P\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) \Rightarrow P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

b)  $\overrightarrow{NM} = \left(6 - 2, 1 + \frac{3}{2}\right) = \left(4, \frac{5}{2}\right)$  y  $\overrightarrow{AB} = (3 + 5, 3 + 2) = (8, 5) \Rightarrow \overrightarrow{NM}$  y  $\overrightarrow{AB}$  son paralelos, porque son proporcionales.

$\overrightarrow{PN} = \left(2 + 1, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (3, -2)$  y  $\overrightarrow{BC} = (9 - 3, -1 - 3) = (6, -4) \Rightarrow \overrightarrow{PN}$  y  $\overrightarrow{BC}$  son paralelos, porque son proporcionales.

$\overrightarrow{MP} = \left(-1 - 6, \frac{1}{2} - 1\right) = \left(-7, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{CA} = (-5 - 9, -2 + 1) = (-14, -1) \Rightarrow \overrightarrow{MP}$  y  $\overrightarrow{CA}$  son paralelos, porque son proporcionales.

c) Existen las siguientes relaciones:  $\overrightarrow{NM} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ ;  $\overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$ ;  $\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{CA}}{2}$

9.87 Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto  $A(-3, 1)$  y tiene la misma dirección que la recta siguiente:  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Un vector director de la recta  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$  es  $\vec{u} = (-3, 4)$ .

La recta que pasa por  $A(-3, 1)$  y tiene la misma dirección que la recta anterior tiene de ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

9.88 Halla la ecuación vectorial y la pendiente de las dos rectas correspondientes al tejado de la caseta del perro.

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  los vértices del triángulo que forma el tejado de la caseta del perro. Sus coordenadas son:

$A(0; 0,8)$ ,  $B(0,6; 1)$  y  $C(1,2; 0,8)$

$\overrightarrow{AB} = (0,6 - 0; 1 - 0,8) = (0,6; 0,2)$

$\overrightarrow{BC} = (1,2 - 0,6; 0,8 - 1) = (0,6; -0,2)$

La recta  $AB$  es la que pasa por  $A$  y tiene como vector director a  $\overrightarrow{AB}$ .

Ecuación:  $(x, y) = (0; 0,8) + t(0,6; 0,2)$

$m = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$  La pendiente es  $\frac{1}{3}$ .

La recta  $BC$  es la que pasa por  $B$  y tiene como vector director a  $\overrightarrow{BC}$ .

Ecuación:  $(x, y) = (0,6; 1) + t(0,6; -0,2)$

$m' = \frac{-0,2}{0,6} = -\frac{1}{3}$ . La pendiente es  $-\frac{1}{3}$ .



**9.89** Escribe las ecuaciones vectorial, continua, general, explícita y punto-pendiente de las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes.

a)  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

a) Ecuación vectorial:  $(x, y) = (0, 3) + t(2, -1)$

Despejamos  $t$  en las ecuaciones paramétricas e igualamos:  $\frac{x}{2} = 3 - y$

Ecuación continua:  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1}$

$x = -2y + 6$ ,  $x + 2y - 6 = 0$  ecuación general.

$2y = -x + 6$ ,  $y = -\frac{1}{2}x + 3$  ecuación explícita.

$y = -\frac{1}{2}(x - 6)$  ecuación punto-pendiente.

b) Ecuación vectorial:  $(x, y) = (5, 2) + t(-3, 4)$

Despejamos  $t$  en las ecuaciones paramétricas e igualamos:  $\frac{x-5}{-3} = \frac{y-2}{4}$ : ecuación continua.

$4x - 20 = -3y + 6$ ,  $4x + 3y - 26 = 0$ : ecuación general.

Despejamos  $y - 2$  de la ecuación continua:  $y - 2 = \frac{4(x-5)}{-3} \Rightarrow y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 5)$  ecuación punto-pendiente.

$y = 2 - \frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{26}{3}$ : ecuación explícita.

**9.90** Dada la recta de ecuación  $3x - ky + 5 = 0$ , calcula el valor de  $k$  para que:

a) Tenga pendiente 0,5.

b) Su ordenada en el origen sea  $-1$ .

c) Pase por el punto  $P(-2, 7)$ .

a) Vector director:  $\vec{u} = (k, 3)$ , pendiente:  $\frac{3}{k} \Rightarrow \frac{3}{k} = 0,5 \Rightarrow k = \frac{3}{0,5} \Rightarrow k = 6$

b) Ponemos la recta en forma explícita:  $3x + 5 = ky \Rightarrow y = \frac{3}{k}x + \frac{5}{k} \Rightarrow$  Ordenada en el origen:  $\frac{5}{k}$   
 $\frac{5}{k} = -1 \Rightarrow k = -5$

c) Las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la recta.

$$3 \cdot (-2) - k \cdot 7 + 5 = 0 \Rightarrow -6 - 7k + 5 = 0 \Rightarrow -1 = 7k \Rightarrow k = -\frac{1}{7}$$

**9.91** El vértice correspondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo es el punto  $A(3, 2)$ , los dos catetos son paralelos a los ejes de coordenadas y la hipotenusa está sobre la recta  $y = 2x + 4$ .

Halla el área del triángulo.

Como los catetos son paralelos a los ejes, sus coordenadas serán:  $B(p, 2)$ ,  $C(3, q)$ .

Como  $B$  y  $C$  pertenecen a la recta  $y = 2x + 4$ :  $2 = 2p + 4 \Rightarrow p = -1$   $q = 2 \cdot 3 + 4 \Rightarrow q = 10$

Luego  $B(-1, 2)$ ,  $C(3, 10)$ .

Entonces, el cateto  $AB$  mide  $3 - (-1) = 4$  unidades y el cateto  $AC$  mide  $10 - 2 = 8$  unidades.

Por tanto, el área del triángulo es:  $\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$  unidades de superficie.

**9.92** La recta  $r$  pasa por los puntos  $A(-1, 4)$  y  $B(2, -3)$ .

Halla la ecuación de la recta paralela a  $r$  que pasa por el origen de coordenadas.

$\overrightarrow{AB} = (2, -3) - (-1, 4) = (3, -7)$ , luego un vector director de la recta  $r$  es  $\vec{u} = (3, -7)$ .

La recta paralela a  $r$  que pasa por el origen de coordenadas  $O(0, 0)$  es:  $\frac{x}{3} = \frac{y}{-7}$

9.93 Halla la posición relativa de la recta  $2x + y - 4 = 0$  con cada una de las siguientes.

a)  $y = -2x + 2$       b)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2}$       c)  $y - 2 = -2(x + 1)$       d)  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$       e)  $4x + 2y - 8 = 0$

a)  $y = -2x + 2$  en forma implícita:  $2x + y - 2 = 0$ .  $\left. \begin{matrix} 2x + y - 4 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{matrix} \right\} \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{-2} \Rightarrow$  rectas paralelas.

b)  $-2x + 4 = y \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$ . Las rectas son:  $\left. \begin{matrix} 2x + y - 4 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{matrix} \right\} \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-4}{-4} \Rightarrow$  rectas coincidentes.

c)  $y - 2 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + y = 0$ . Las rectas son:  $\left. \begin{matrix} 2x + y - 4 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{matrix} \right\} \frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{0} \Rightarrow$  rectas paralelas.

d) Despejamos  $t$  e igualamos:

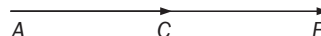
$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow 3x - 2y = 0$ . Las rectas son:  $\left. \begin{matrix} 2x + y - 4 = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{matrix} \right\} \frac{2}{3} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow$  rectas secantes.

e) Como  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}$ , las rectas son coincidentes.

### PARA REFORZAR

9.94 Sobre un segmento cualquiera  $AB$ , dibuja un punto  $C$  tal que los vectores  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{CB}$  sean equipolentes.

El punto  $C$  debe ser el punto medio del segmento  $AB$ .



9.95 Dados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , dibuja y halla las coordenadas de los siguientes vectores.

a)  $3\vec{u}$       c)  $\frac{1}{2}\vec{u}$   
b)  $\vec{u} - \vec{v}$       d)  $-2\vec{v}$

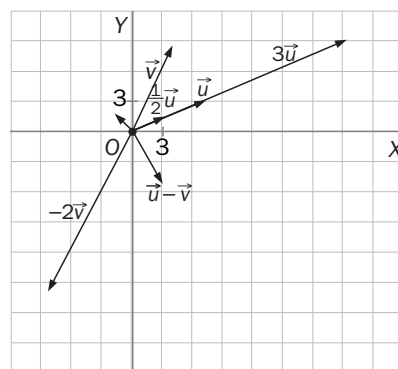
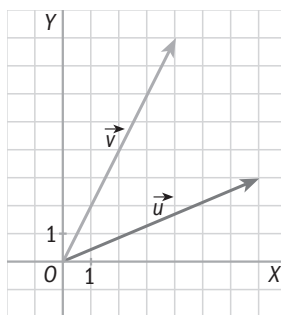
$\vec{u} = (7, 3)$  y  $\vec{v} = (4, 8)$

a)  $3\vec{u} = 3(7, 3) = (21, 9)$

b)  $\vec{u} - \vec{v} = (7, 3) - (4, 8) = (3, -5)$

c)  $\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}(7, 3) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

d)  $-2\vec{v} = -2(4, 8) = (-8, -16)$



9.96 Calcula la distancia entre  $A(1, -3)$  y  $B(-2, -5)$  y las coordenadas del punto medio del segmento  $AB$ .

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-5 + 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} u$

Punto medio del segmento  $AB$ :  $M = \left(\frac{1 - 2}{2}, \frac{-3 - 5}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{-1}{2}, -4\right)$

9.97 Obtén las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por el punto  $A(-1, 3)$  y tiene la dirección del vector  $\vec{v} = (-3, 2)$ .

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (-1, 3) + t(-3, 2)$

$(x, y) = (-1, 3) + t(-3, 2) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ : ecuaciones paramétricas.

9.98 Halla las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 4)$  y  $B(3, 1)$ .

La recta que pasa por  $A$  y  $B$  es la recta que pasa por  $A(-1, 4)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{AB} = (3 + 1, 1 - 4) = (4, -3)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 4}{-3}$

Quitamos denominadores:  $-3x - 3 = 4y - 16 \Rightarrow 3x + 4y - 13 = 0$ : ecuación general.

**9.99 Escribe las ecuaciones punto-pendiente y explícita de las rectas correspondientes a cada uno de los cuatro lados del rombo.**

Las coordenadas de los vértices son:

$A(2, 0)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(2, 6)$  y  $D(0, 3)$ .

- $AB$ : punto  $A(2, 0)$ , vector director  $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ .

$$\text{Ecuación explícita de } AB: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow 3x - 6 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente de } AB: y = \frac{3}{2}(x - 2)$$

- $BC$ : punto  $B(4, 3)$ , vector director:  $\overrightarrow{BC} = (-2, 3)$ .

$$\text{Ecuación explícita de } BC: \frac{x-4}{-2} = \frac{y-3}{3} \Rightarrow 3x - 12 = -2y + 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 9$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente de } BC: y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 4)$$

- $CD$ : punto  $C(2, 6)$ , vector director:  $\overrightarrow{CD} = (-2, -3)$ .

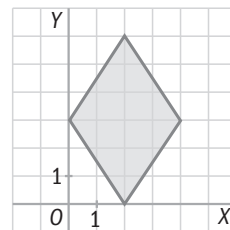
$$\text{Ecuación explícita de } CD: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-6}{-3} \Rightarrow -3x + 6 = -2y + 12 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente de } CD: y - 6 = \frac{3}{2}(x - 2)$$

- $DA$ : punto  $D(0, 3)$ , vector director:  $\overrightarrow{DA} = (2, -3)$ .

$$\text{Ecuación explícita de } DA: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x = 2y - 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$\text{Ecuación punto-pendiente de } DA: y - 3 = -\frac{3}{2}x$$



**9.100 Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas.**

a)  $r: y = 2x - 3$

$s: y = 2x$

a) Recta  $r: m = 2, n = -3$

Recta  $s: m' = 2, n' = 0$

Las rectas son paralelas.

b)  $\frac{3}{12} = \frac{-2}{-8} \neq \frac{5}{40}$

Las rectas son paralelas.

b)  $r: 3x - 2y + 5 = 0$

$s: 12x - 8y + 40 = 0$

c) Expresamos las dos rectas en forma implícita:

$r: 5x = 3y - 6, 5x - 3y + 6 = 0.$

$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$  Despejamos  $t$  e igualamos:

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}, 3x - 3 = -y + 2, 3x + y - 5 = 0.$

Las rectas son:  $\begin{cases} r: 5x - 3y + 6 = 0 \\ s: 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$

$\frac{5}{3} \neq \frac{-3}{1}$ : las rectas son secantes.

c)  $r: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{5}$

$s: x = (1, 2) + t(-1, 3)$

**PARA AMPLIAR**

**9.101 Encuentra un vector que tenga la misma dirección y el mismo sentido que el vector  $\vec{v} = (12, -5)$ , pero cuyo módulo sea 1.**

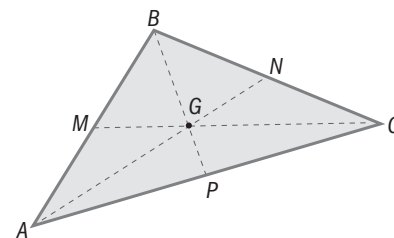
$$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 u$$

El vector  $\vec{u} = \frac{1}{13}\vec{v}$ , de coordenadas  $\left(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13}\right)$ , tiene la misma dirección y el mismo sentido que  $\vec{v}$ , y su módulo es:

$$|\vec{u}| = \left|\frac{1}{13}\right| |\vec{v}| = \frac{1}{13} \cdot 13 = 1 \vec{u}.$$



9.102 En el triángulo  $ABC$  de vértices  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$ , sean  $M$ ,  $N$  y  $P$  los puntos medios de los lados. Considera el baricentro  $G$ , punto de intersección de las medianas, en una cualquiera de ellas; por ejemplo, en la  $AN$ .



a) ¿Qué relación hay entre  $\overrightarrow{AG}$  y  $\overrightarrow{GN}$ ?

b) Expresa la relación anterior en coordenadas y halla las coordenadas del baricentro.

a) El baricentro es el punto de intersección de las medianas y dista el doble del vértice que del punto medio del lado. Por tanto:  $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GN}$ .

b) Sabemos que  $N\left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$ . Sea  $G(g_1, g_2)$ . Entonces:

$$(g_1 - a_1, g_2 - a_2) = 2\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - g_1, \frac{b_2 + c_2}{2} - g_2\right) \Rightarrow \begin{cases} g_1 - a_1 = b_1 + c_1 - 2g_1 \\ g_2 - a_2 = b_2 + c_2 - 2g_2 \end{cases}$$

$$\text{Las coordenadas del baricentro } G(g_1, g_2) \text{ son: } g_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, g_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$

9.103 Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen el mismo baricentro. Las coordenadas de los vértices del primero son  $A(-2, 1)$ ,  $B(7, 5)$  y  $C(1, -3)$ , y las de dos vértices del segundo,  $A'(4, 3)$  y  $B'(-3, -2)$ . Halla las coordenadas de  $C'$ .

Según el problema anterior, las coordenadas del baricentro del triángulo  $ABC$  son:

$$g_1 = \frac{-2 + 7 + 1}{3} = 2, \quad g_2 = \frac{1 + 5 - 3}{3} = 1; \text{ o sea, } G(2, 1).$$

Si las coordenadas de  $C'$  son  $(x, y)$ , como  $G$  es también el baricentro del triángulo  $A'B'C'$ , se tiene:

$$\begin{cases} 2 = \frac{4 - 3 + x}{3} \\ 1 = \frac{3 - 2 + y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 1 + x \\ 3 = 1 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Las coordenadas de } C' \text{ son: } C'(5, 2).$$

9.104 Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.

Sea el paralelogramo  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$ ,  $D(d_1, d_2)$ .

Por tanto, los vectores  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ ,  $\overrightarrow{DC} = (c_1 - d_1, c_2 - d_2)$  son equipolentes; y, en consecuencia:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = c_1 - d_1 \\ b_2 - a_2 = c_2 - d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + c_1 = b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 = b_2 + d_2 \end{cases}$$

El punto medio de la diagonal  $AC$  es:  $M = \left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$ , y el punto medio de la diagonal  $BD$  es  $N = \left(\frac{b_1 + d_1}{2}, \frac{b_2 + d_2}{2}\right)$ .

Por las relaciones anteriores,  $M$  coincide con  $N$ ; esto es, las diagonales se cortan en el punto medio.

9.105 Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo  $ABCD$  son  $A(-2, 4)$  y  $B(3, 5)$ . Halla las coordenadas de los otros dos vértices sabiendo que el centro del paralelogramo es el punto  $M(1, -1)$ .

Según el problema anterior, las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio.

Por tanto, el vértice  $C(c, c')$  opuesto del  $A$  será el extremo del segmento  $AC$ , cuyo punto medio es  $M$ :

$$\begin{cases} 1 = \frac{-2 + c}{2} \\ -1 = \frac{4 + c'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ c' = -6 \end{cases} \Rightarrow C(4, -6)$$

También el vértice  $D(d, d')$ , opuesto del  $B$ , será el extremo del segmento  $BD$ , cuyo punto medio es  $M$ :

$$\begin{cases} 1 = \frac{3 + d}{2} \\ -1 = \frac{5 + d'}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ d' = -7 \end{cases} \Rightarrow D(-1, -7)$$

Las coordenadas de los otros dos vértices son  $C(4, -6)$  y  $D(-1, -7)$ .

**9.106** Se llama ecuación segmentaria de una recta a la ecuación de la forma:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

a) Halla la longitud de los segmentos que determina con los ejes coordenados.

b) Expresa la recta  $5x + 2y - 10 = 0$  en forma segmentaria y halla el área del triángulo que la recta determina con los ejes.

$$a) x = 0 \Rightarrow \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a$$

Corta a los ejes en los puntos  $A(a, 0)$  y  $B(0, b)$ . El segmento que determina con el eje  $OX$  tiene longitud  $a$ , y el segmento que determina con el eje  $OY$  tiene longitud  $b$ .

b)  $5x + 2y = 10$ . Dividiendo los dos miembros entre 10:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1, \text{ que es la forma segmentaria de la ecuación.}$$

Los puntos de corte con los ejes son  $A(2, 0)$  y  $B(0, 5)$ .

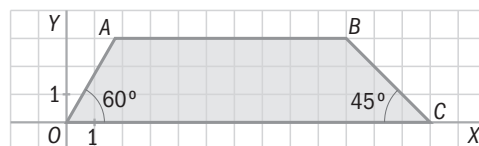
$$\text{El área del triángulo es } \frac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ u}^2.$$

**9.107** Halla la ecuación vectorial de los lados no paralelos del trapecio  $OABC$ .

La recta correspondiente al lado  $OA$  pasa por  $O(0, 0)$  y su pendiente es  $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ . Por tanto, un vector director es, por ejemplo,  $\vec{u} = (1, \sqrt{3})$ . La ecuación de la recta correspondiente al lado  $OA$  es:  
 $(x, y) = (0, 0) + t(1, \sqrt{3})$

La recta correspondiente al lado  $BC$  tiene de inclinación  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ , luego su pendiente es  $m' = \tan 135^\circ = -1$ ; y un vector director es, por ejemplo,  $\vec{u}' = (1, -1)$ .

Pasa por el punto  $B(13, 3)$ , luego la ecuación vectorial es  $(x, y) = (13, 3) + t(1, -1)$



**9.108** Por el origen de coordenadas trazamos una recta  $s$  perpendicular a la recta  $r$  cuya ecuación general es:  $2x + y + 3 = 0$ .

Halla el área del triángulo formado por las rectas  $r$  y  $s$  y el eje de abscisas.

La pendiente de  $r$  es  $m = -2$ , luego  $\tan \alpha = 2$ .

Si  $s$  es perpendicular a  $r$ , entonces  $\alpha$  y  $\beta$  son complementarios, luego  $\tan \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow$  La pendiente de  $s$  es  $m' = \frac{1}{2}$ .

Como  $s$  pasa por el origen, su ecuación es:  $y = \frac{1}{2}x$ .

El triángulo  $OAC$  es rectángulo en  $C$ , luego su área es:  $\text{área} = \frac{1}{2} AC \cdot CO$ .

$A\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$  y  $C$  es la intersección de las rectas  $r$  y  $s$ :

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + \frac{1}{2}x + 3 = 0, \quad \frac{5x}{2} = -3, \quad x = -\frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Luego: } C\left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right). \quad AC = \sqrt{\left(-\frac{6}{5} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{5}u, \quad CO = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}u;$$

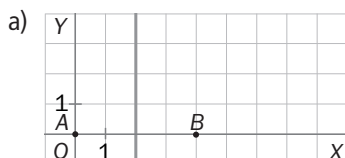
$$\text{Luego: } \text{área} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10}\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{9}{20}u^2. \text{ El área del triángulo es } \frac{9}{20}u^2.$$

# Una carretera con referencia

9.109 Entre las localidades  $A$  y  $B$  hay una distancia de 4 kilómetros. Todos los puntos de la carretera se encuentran a igual distancia de una y otra localidad.



- Dibuja unos ejes de coordenadas y sitúa la localidad  $A$  en el origen, y la  $B$ , en la parte positiva del eje de abscisas.
- ¿Cuáles son las coordenadas de  $A$  y  $B$ ?
- Escribe la ecuación de la recta que determina la carretera. ¿Qué lugar geométrico es?
- ¿Puede estar situado en el punto de coordenadas  $(2, 5)$  un coche que circula por  $r$ ?
- Otro automóvil que circula por la carretera se encuentra a 10 kilómetros de  $B$ . ¿Cuáles son sus coordenadas?



- $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$
- La ecuación de la recta que determina la carretera es  $x = 2$ . Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de  $A$  y de  $B$ ; o sea, es la mediatriz del segmento  $AB$ .
- Sí puede estar situado en el punto  $(2, 5)$ , pues  $x = 2$ .
- Si  $C(x, y)$  está a 10 km de  $B$ :  $d(C, B) = 10$ , luego:  $\sqrt{(4-x)^2 + (0-y)^2} = 10 \Rightarrow 16 - 8x + x^2 + y^2 = 100$ ; y como circula por la carretera:  $x = 2$ .

$$\text{Por tanto: } 16 - 16 + 4 + y^2 = 100 \Rightarrow y = \pm\sqrt{96} = \pm 4\sqrt{6}.$$

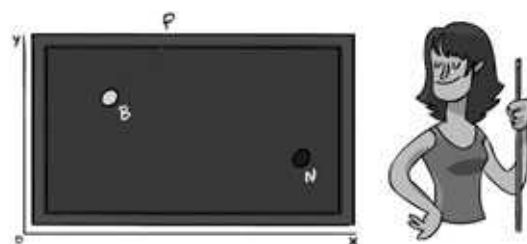
Hay dos posibles soluciones para las coordenadas de  $B$ :  $B_1(2, 4\sqrt{6})$  (el automóvil está en el primer cuadrante) y  $B_2(2, -4\sqrt{6})$  (el automóvil está en el cuarto cuadrante).

# El billar

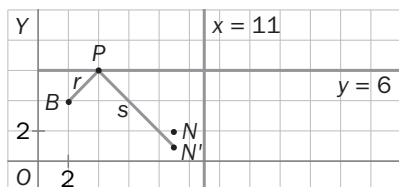
9.110 Una mesa de billar está limitada por los ejes de coordenadas y las rectas  $x = 11$ , e  $y = 6$ .

La bola blanca está situada en el punto de coordenadas  $B(2, 4)$ .

La bola negra está situada en el punto de coordenadas  $N(9, 2)$ .



- Un jugador lanza la bola blanca sobre la banda superior de forma que rebota en el punto  $P(4, 6)$ . ¿Chocará contra la bola negra? ¿Por qué?
- Indica algún punto situado en la recta  $x = 9$  donde colocar la bola negra de forma que la blanca choque contra ella.



La bola  $B$ , al dar en la banda superior, rebota con el mismo ángulo de incidencia. Si  $r$  es la recta determinada por  $B$  y  $P$ , la recta  $s$  que sigue la trayectoria de la bola al rebotar, es la simétrica de  $r$  respecto de la recta vertical que pasa por  $P$ .

$$\text{Recta } r: \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{6-4} \Rightarrow y = x + 2$$

$$\text{Recta } s: \text{ su pendiente es opuesta: } y = -x + k.$$

$$\text{Como la recta pasa por } P(4, 6): 6 = -4 + k \Rightarrow k = 10$$

$$s: y = -x + 10.$$

- $N(9, 2)$  no pertenece a  $s$ , pues  $2 \neq -9 + 10$ , luego la bola blanca cuando rebota no choca con la bola negra.
- Para hallar el punto de abscisa  $x = 9$  perteneciente a la recta  $s$ , se sustituye:  $y = -9 + 10 = 1$ . Se debe situar la bola negra en el punto  $N'(9, 1)$  para que la blanca choque con ella.

- 9.A1 Dado el vector  $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ , halla las coordenadas del extremo del vector equipolente a él que tiene por origen el punto  $C(2, -4)$ .

Si el extremo es el punto  $D(x, y)$ , los vectores  $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$  y  $\overrightarrow{CD} = (x - 2, y + 4)$  deben tener las mismas coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} -1 = x - 2 \\ 3 = y + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array} \right\} \quad \text{Las coordenadas del extremo del vector son: } D(1, -1).$$

- 9.A2 Dados los vectores  $\vec{u} = (-1, -2)$ ,  $\vec{v} = (3, 4)$  y  $\vec{w} = (1, 5)$ , halla los valores de  $a$  y  $b$  tales que:  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ .

$$(1, 5) = a(-1, -2) + b(3, 4) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 = -a + 3b \\ 5 = -2a + 4b \end{array} \right\} \quad \text{Se resuelve el sistema:}$$

$$a = 3b - 1 \Rightarrow 5 = -2(3b - 1) + 4b \Rightarrow 5 = -6b + 2 + 4b, 3 = -2b, b = -\frac{3}{2}, a = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{11}{2}$$

- 9.A3 Sean los vectores  $\vec{u} = (3, -4)$  y  $\vec{v} = (5, 12)$ . Halla  $|\vec{u}| + |\vec{v}|$  y  $|\vec{u} + \vec{v}|$ . ¿Cuál de los dos es mayor?

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ u}, |\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ u}, |\vec{u}| + |\vec{v}| = 5 + 13 = 18 \text{ u},$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3 + 5, -4 + 12) = (8, 8), |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} = 11,31... \text{ u}$$

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \text{ es mayor que } |\vec{u} + \vec{v}|.$$

- 9.A4 El punto medio  $M$  de un segmento  $AB$  de extremos  $A(5, -1)$  y  $B(1, 3)$  es a su vez el origen de un segmento  $MN$ . Si el punto medio de  $MN$  es  $P(-3, 3)$ , halla las coordenadas de  $N$ .

$$\text{Las coordenadas de } M \text{ son: } M\left(\frac{5+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \Rightarrow M(3, 1).$$

$$\text{Si las coordenadas de } N \text{ son: } N(x, y), \text{ se tiene: } \left. \begin{array}{l} -3 = \frac{3+x}{2} \\ 3 = \frac{1+y}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -9 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow N(-9, 5).$$

- 9.A5 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son  $A(8, 2)$ ,  $B(-2, 2)$  y  $C(4, 4)$ .

Halla las longitudes de sus lados y las ecuaciones de sus medianas.

$$d(A, B) = \sqrt{(8+2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ u}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4+2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ u}$$

$$d(C, A) = \sqrt{(8-4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

$$\text{Los lados miden } 10 \text{ u}, 2\sqrt{10} \text{ u y } 2\sqrt{5} \text{ u}.$$

Para hallar las ecuaciones de las medianas, se hallan las coordenadas de los puntos medios de los lados.

$$M \text{ punto medio de } AB: M\left(\frac{8-2}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow M(3, 2).$$

$$\text{Punto medio de } BC: N\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow N(1, 3).$$

$$\text{Punto medio de } CA: P\left(\frac{4+8}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \Rightarrow P(6, 3).$$

$$\text{Mediana correspondiente al vértice } A: \text{ punto } A(8, 2), \text{ vector director } \overrightarrow{AN} = (1 - 8, 3 - 2) = (-7, 1). \text{ Ecuación: } \frac{x-8}{-7} = \frac{y-2}{1}$$

$$\text{Mediana correspondiente al vértice } B: \text{ punto } B(-2, 2), \text{ vector director } \overrightarrow{BP} = (6 + 2, 3 - 2) = (8, 1). \text{ Ecuación: } \frac{x+2}{8} = \frac{y-2}{1}$$

$$\text{Mediana correspondiente al vértice } C: \text{ punto } C(4, 4), \text{ vector director } \overrightarrow{CM} = (3 - 4, 2 - 4) = (-1, -2). \text{ Ecuación: } \frac{x-4}{-1} = \frac{y-4}{-2}$$

**9.A6** Halla un punto, un vector director, la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas cuyas ecuaciones generales se dan a continuación.

a)  $3x - 2y + 4 = 0$

b)  $5x - y + 2 = 0$

c)  $6x + 3y = 0$

d)  $2y + 7 = 0$

a)  $x = 0 \Rightarrow -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2$ . Punto  $A(0, 2)$ ; vector director:  $\vec{u} = (2, 3)$ ;

$2y = 3x + 4, y = \frac{3}{2}x + 2$ , pendiente:  $m = \frac{3}{2}$ , ordenada en el origen  $n = 2$ .

b)  $x = 0 \Rightarrow y = 2$ . Punto:  $A(0, 2)$ ; vector director:  $\vec{u} = (1, 5)$ ;

$y = 5x + 2m$  pendiente  $m = 5$ , ordenada en el origen:  $n = 2$ .

c)  $x = 0 \Rightarrow y = 0$ . Punto:  $A(0, 0)$ ; vector director:  $\vec{u} = (-3, 6)$ ;

$3y = -6x, y = -2x$ , pendiente:  $m = -2$ , ordenada en el origen:  $n = 0$ .

d)  $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$ . Punto:  $A\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ ; vector director:  $\vec{u} = (-2, 0)$ ;  $y = -\frac{7}{2}$ , pendiente:  $m = 0$ , ordenada en el origen:  $n = -\frac{7}{2}$ .

**9.A7** ¿Qué ángulo forma con el eje positivo de abscisas cada una de las siguientes rectas?

a)  $(x, y) = (3, 2) + t(1, 1)$

b)  $(x, y) = (-1, 0) + t(1, \sqrt{3})$

Si el vector director es  $\vec{u} = (a, b)$ , la pendiente es  $m = \frac{b}{a}$

a)  $\vec{u} = (1, 1), m = \frac{1}{1} = 1$ : forma un ángulo de  $45^\circ$ .

b)  $\vec{u} = (1, \sqrt{3}), m = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ : forma un ángulo de  $60^\circ$ .

**9.A8** Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua, general, punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por  $A(5, 1)$  y  $B(2, -3)$ .

La recta pasa por  $A(5, 1)$  y tiene como vector director  $\overrightarrow{AB} = (2, -3) - (5, 1) = (-3, -4)$ .

Ecuación vectorial:  $(x, y) = (5, 1) + t(-3, -4)$ .

Ecuaciones paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$$

Ecuación continua:  $\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{-4}$

Se quitan denominadores y se ordena:

$-4(x-5) = -3(y-1) \Rightarrow -4x + 20 = -3y + 3 \Rightarrow -4x + 3y + 17 = 0$

Ecuación general:  $-4x + 3y + 17 = 0$

Ecuación punto pendiente:  $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 5)$

Se despeja  $y$ :  $y = \frac{4}{3}(x - 5) + 1, y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$

Ecuación explícita:  $y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$

**9.A9** Dada la recta  $r: 2x - y - 4 = 0$ , halla la ecuación de la recta paralela a  $r$  cuya ordenada en el origen sea 1.

La ecuación explícita de  $r$  es:  $y = 2x - 4$ .

Toda recta paralela a ella es de la forma:  $y = 2x + n$ . Como la ordenada en el origen es 1:  $n = 1$ .

La ecuación de la recta pedida es  $y = 2x + 1$ .

9.A10 Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a)  $r: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

$s: y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 4)$

b)  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5}$

$s: 3x + 2y - 8 = 0$

a) Escribimos la recta  $r$  en forma punto pendiente:  $y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 4)$

Observamos que su ecuación es la misma que la de la recta  $s$ .

Las rectas  $r$  y  $s$  son coincidentes.

b) Expresamos  $r$  en forma implícita:  $5x - 5 = 2y - 6$

$r: 5x - 2y + 1 = 0$

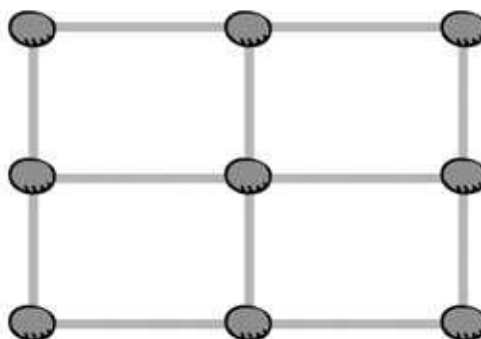
$s: 3x + 2y - 8 = 0$

Como  $\frac{5}{3} \neq \frac{-2}{2}$  las rectas  $r$  y  $s$  son secantes.

ENTRETENIDO

Los nueve puntos

Fíjate en la figura, y sitúa nueve puntos en los vértices de una cuadrícula  $2 \times 2$ .



Se trata de unir los 9 puntos mediante cuatro segmentos rectilíneos consecutivos sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces parte del mismo camino. ¿Cómo lo consigues?

El bloqueo que surge a la hora de resolver este problema es porque damos por hecho que no podemos salirnos del cuadrado limitado por los nueve puntos. El lector se impone limitaciones innecesarias que le impiden considerar otras posibilidades, entre las que se encuentra el camino hacia la solución.

